

В. В. Деменчук

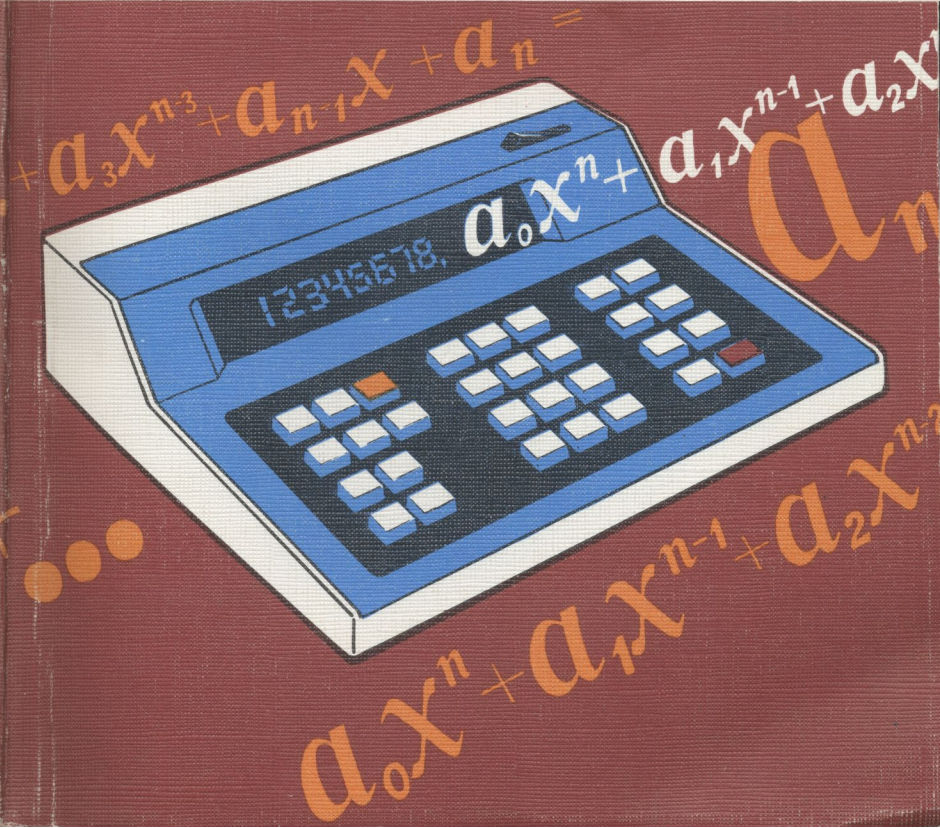


МИР  
ЗАНИМАТЕЛЬНОЙ  
НАУКИ

В. В. Деменчук

# МНОГОЧЛЕНЫ И МИКРОКАЛЬКУЛЯТОР

МНОГОЧЛЕНЫ И МИКРОКАЛЬКУЛЯТОР





МИР  
ЗАНИМАТЕЛЬНОЙ  
НАУКИ

**В. В. Деменчук**

# **МНОГОЧЛЕНЫ И МИКРОКАЛЬКУЛЯТОР**



МИНСК  
«ВЫШЭЙШАЯ ШКОЛА»  
1988

ББК 22.144

Д 30

УДК 512.622+512.622:681.321—181.4

Серия основана в 1982 г.

Рецензенты: канд. физ.-мат. наук *М. М. Лесохин*; канд. техн. наук *А. Б. Непомнящий*



Scan AAW

**Деменчук В. В.**

Д 30 Многочлены и микрокалькулятор.— Мн.: Выш. шк., 1988.—176 с.— (Мир занимат. науки).  
ISBN 5-339-00123-7.

Изложены элементы теории многочленов и показано ее применение при решении различного рода задач. Дана реализация алгоритмов этой теории в виде программ для программируемого микрокалькулятора.

Для студентов вузов, учащихся старших классов и учителей средних школ, а также для всех, кто интересуется математикой.

Д  $\frac{1702030000-071}{М304(03)-88}$  БЗ 13—88

ББК 22.144+32.974

ISBN 5-339-00123-7

© Издательство «Вышэйшая школа»,  
1988

## К ЧИТАТЕЛЮ

*С понятием многочлена читатель знаком из школьного курса математики. Однако изучение многочленов в школе ограничивается лишь введением операций над ними и некоторыми элементарными сведениями. Между тем существует интересная содержательная теория многочленов. Знакомство с началами этой теории весьма полезно, поскольку она находит самое широкое применение в науке и технике.*

*Многие задачи теории многочленов на практике приводят к трудоемким и громоздким вычислениям, которые сложно выполнять вручную. В подобных случаях на помощь человеку приходят ЭВМ, позволяющие быстро и с высокой степенью точности решать самые различные задачи, в том числе и упомянутые выше.*

*Данная книга посвящена началам теории многочленов и решению ее задач с использованием «ЭВМ в миниатюре» — программируемых микрокалькуляторов. В первых двух главах в популярной форме излагаются элементы теории многочленов. Приводятся примеры применения многочленов при решении уравнений и их систем, доказательстве числовых тождеств, освобождении от иррациональности в знаменателе дроби и т. д. В книге содержится большое количество задач, в том числе и олимпиадных, решение которых поможет читателю глубже понять излагаемый материал и самостоятельно проверить*

степень его усвоения. Ко многим задачам даются ответы, указания или решения.

Для понимания первой главы книги достаточно той математической подготовки, которую читатель получил в школе. Вторую главу смогут понять лишь те, кто знаком с комплексными числами и с действиями над ними. (Заметим, что читатель, который незнаком с комплексными числами, после прочтения первой главы может сразу приступить к изучению третьей.) И, наконец, третья глава адресована читателям, имеющим минимальные навыки работы с программируемым микрокалькулятором. Эта глава посвящена применению программируемого микрокалькулятора при решении некоторых задач теории многочленов: вычислении значений многочлена, делении многочлена на линейный двучлен, нахождении корней квадратного трехчлена и др. Здесь приводятся программы, реализующие ранее изложенные алгоритмы теории многочленов, для программируемых микрокалькуляторов и даются инструкции по использованию этих программ.

Автор выражает искреннюю благодарность рецензентам — канд. физ.-мат. наук М. М. Лесохину и канд. техн. наук А. Б. Непомнящему, а также канд. физ.-мат. наук Л. Б. Шнеперману и В. В. Пенкрат за ценные замечания и советы, которые способствовали улучшению книги.

Все отзывы и пожелания просьба присылать по адресу: 220048, Минск, проспект Машерова, 11, издательство «Вышэйшая школа».

**В. В. Деменчук**

# МНОГОЧЛЕНЫ ОТ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

## ПОНЯТИЕ МНОГОЧЛЕНА. СТЕПЕНЬ МНОГОЧЛЕНА

Читатель, конечно, знаком с элементарными понятиями теории многочленов, умеет складывать и перемножать многочлены. Но, как говорят, «повторенье — мать ученья», поэтому напомним все эти понятия.

*Многочленом от переменной  $x$  будем называть выражение вида*

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

*где  $n$  — натуральное число;  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$  — любые числа, называемые коэффициентами этого многочлена. Выражения  $a_n x^n, a_{n-1} x^{n-1}, \dots, a_1 x, a_0$  называются членами многочлена,  $a_0$  — свободным членом.*

Часто будем употреблять и такие термины:  $a_n$  — коэффициент при  $x^n$ ,  $a_{n-1}$  — коэффициент при  $x^{n-1}$  и т. д.

Примерами многочленов являются следующие выражения:  $0x^4 + 2x^3 + (-3)x^2 + (3/7)x + \sqrt{2}$ ;  $0x^2 + 0x + 3$ ;  $0x^2 + 0x + 0$ . Здесь для первого многочлена коэффициентами являются числа 0, 2, -3, 3/7,  $\sqrt{2}$ ; при этом, например, число 2 — коэффициент при  $x^3$ , а  $\sqrt{2}$  — свободный член.

*Многочлен, у которого все коэффициенты равны нулю, называется нулевым.*

Так, например, многочлен  $0x^2 + 0x + 0$  — нулевой.

Из записи многочлена видно, что он состоит из нескольких членов. Отсюда и произошел термин «многочлен».

член» (много членов). Иногда многочлен называют *полиномом*. Этот термин происходит от греческих слов *поли* — много и *ном* — член.

Многочлен от одной переменной  $x$  будем обозначать так:  $f(x)$ ,  $g(x)$ ,  $h(x)$  и т. д. Например, если первый из приведенных выше многочленов обозначить  $f(x)$ , то можно записать:  $f(x) = 0x^4 + 2x^3 + (-3)x^2 + (3/7)x + \sqrt{2}$ .

Для того чтобы запись многочлена выглядела проще и была компактнее, договорились о ряде условностей.

1. Те члены ненулевого многочлена, у которых коэффициенты равны нулю, не записывают. Например, вместо  $f(x) = 0x^3 + 3x^2 + 0x + 5$  пишут:  $f(x) = 3x^2 + 5$ ; вместо  $g(x) = 0x^2 + 0x + 3$  —  $g(x) = 3$ . Таким образом, каждое число — это тоже многочлен. Многочлен  $h(x)$ , у которого все коэффициенты равны нулю, т. е. нулевой многочлен, записывают так:  $h(x) = 0$ .

2. Коэффициенты многочлена, не являющиеся свободным членом и равные 1, тоже не записывают. Например, многочлен  $f(x) = 2x^3 + 1x^2 + 7x + 1$  можно записать так:  $f(x) = 2x^3 + x^2 + 7x + 1$ .

3. Знак «—» отрицательного коэффициента относят к члену, содержащему этот коэффициент, т. е., например, многочлен  $f(x) = 2x^3 + (-3)x^2 + 7x + (-5)$  записывают в виде  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 7x - 5$ . При этом, если коэффициент, не являющийся свободным членом, равен  $-1$ , то знак «—» сохраняют перед соответствующим членом, а единицу не пишут. Например, если многочлен имеет вид  $f(x) = x^3 + (-1)x^2 + 3x + (-1)$ , то его можно записать так:  $f(x) = x^3 - x^2 + 3x - 1$ .

Может возникнуть вопрос: зачем, например, улавливать о замене  $1x$  на  $x$  в записи многочлена, если известно, что  $1 \cdot x = x$  для любого числа  $x$ ? Дело в том, что последнее равенство имеет место, если  $x$  — число. В нашем же случае  $x$  — элемент произвольной природы. Более

того, запись  $1x$  мы пока не имеем права рассматривать как произведение числа 1 и элемента  $x$ , ибо, повторяем,  $x$  — это не число. Именно таким обстоятельством и вызваны условности в записи многочлена. И если мы далее говорим все-таки о произведении, скажем, 2 и  $x$  без всяких обоснований, то этим допускаем некоторую нестрогость.

В связи с условностями в записи многочлена обращаем внимание на такую деталь. Если имеется, например, многочлен  $f(x) = 3x^3 - 2x^2 - x + 2$ , то его коэффициенты — это числа 3,  $-2$ ,  $-1$ , 2. Конечно, можно было бы сказать, что коэффициентами являются числа 0, 3,  $-2$ ,  $-1$ , 2, имея в виду такое представление данного многочлена:  $f(x) = 0x^4 + 3x^3 - 2x^2 - x + 2$ .

В дальнейшем для определенности будем указывать коэффициенты, начиная с отличного от нуля, в порядке их следования в записи многочлена. Так, коэффициентами многочлена  $f(x) = 2x^5 - x$  являются числа 2, 0, 0, 0,  $-1$ , 0. Дело в том, что хотя, например, член с  $x^2$  в записи отсутствует, это лишь означает, что его коэффициент равен нулю. Аналогично свободного члена в записи нет, поскольку он равен нулю.

Если имеется многочлен  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  и  $a_n \neq 0$ , то число  $n$  называют *степенью* многочлена  $f(x)$  (или говорят:  $f(x)$  — многочлен  $n$ -й степени) и пишут ст.  $f(x) = n$ . В этом случае  $a_n$  называется *старшим коэффициентом*, а  $a_n x^n$  — *старшим членом* данного многочлена.

Например, если  $f(x) = 5x^4 - 2x + 3$ , то ст.  $f(x) = 4$ , старший коэффициент — 5, старший член —  $5x^4$ .

Рассмотрим теперь многочлен  $f(x) = a$ , где  $a$  — число, отличное от нуля. Чему равна степень этого многочлена? Легко заметить, что коэффициенты многочлена  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  пронумерованы справа налево числами 0, 1, 2, ...,  $n-1$ ,  $n$ , и если  $a_n \neq 0$ ,



то ст.  $f(x) = n$ . Значит, степень многочлена — это наибольший из номеров его коэффициентов, отличных от нуля (при той нумерации, о которой только что говорилось). Вернемся теперь к многочлену  $f(x) = a$ ,  $a \neq 0$ , и пронумеруем его коэффициенты справа налево числами  $0, 1, 2, \dots$ . Коэффициент  $a$  при этом получит номер  $0$ , а так как все остальные коэффициенты — нулевые, то это и есть самый большой из номеров коэффициентов данного многочлена, отличных от нуля. Значит, ст.  $f(x) = 0$ .

Таким образом, многочлены нулевой степени — это числа, отличные от нуля.

Осталось выяснить, как обстоит дело со степенью нулевого многочлена. Как известно, все его коэффициенты равны нулю, и поэтому к нему нельзя применить данное выше определение. Так вот, условились нулевому многочлену не приписывать никакой степени, т. е. считать, что он не имеет степени. Такая условность вызвана некоторыми обстоятельствами, которые будут рассмотрены несколько позже.

Итак, нулевой многочлен степени не имеет; многочлен  $f(x) = a$ , где  $a$  — число, отличное от нуля, имеет степень  $0$ ; степень же всякого другого многочлена, как легко заметить, равна наибольшему показателю степени переменной  $x$ , коэффициент при которой не равен нулю.

В заключение напомним еще несколько определений. Многочлен второй степени  $f(x) = ax^2 + bx + c$  называется *квадратным трехчленом*. Многочлен первой степени вида  $g(x) = x + c$  называется *линейным двучленом*. (Происхождение этих терминов совершенно очевидно.)

## Упражнения

1. Укажите коэффициенты многочлена  $f(x)$ , если:

а)  $f(x) = -x^3 - x + 2$ ;

б)  $f(x) = 3x^5 + 2x^2 - 1$ ;

в)  $f(x) = x^7$ ;

г)  $f(x) = -3$ .

2. Запишите многочлен  $f(x)$ , если дана последовательность его коэффициентов:

- а) 2, -1, 3, 1, 6;                      б) 1, 0, 0, 0, 0, 4;  
в) 3, 0, 0, 0, 0, 0;                    г) 2, 0, -1, 0, 4, 0.

3. Найдите степень многочлена  $f(x)$ , если:

- а)  $f(x) = (a^2 - 4)x^3 + (a - 2)x^2 + 3$ ;  
б)  $f(x) = (a^2 - 3a + 2)x^3 + (a - 1)x^2 + (a - 2)x + 5$ ;  
в)  $f(x) = (a^3 - a)x^2 + a(a + 1)x + a$ .

### РАВЕНСТВО МНОГОЧЛЕНОВ. ЗНАЧЕНИЕ МНОГОЧЛЕНА

Продолжим знакомство с основными понятиями теории многочленов.

Два многочлена  $f(x)$  и  $g(x)$  считаются равными, если равны их коэффициенты при одинаковых степенях переменной  $x$  и свободные члены (или, короче, равны их соответствующие коэффициенты). В этом случае пишут:  $f(x) = g(x)$ .

Например, многочлены  $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 1$  и  $g(x) = 2x^2 - 3x + 1$  не равны, ибо у первого из них коэффициент при  $x^3$  равен 1, а у второго — нулю (не забывайте, что согласно принятым условностям мы можем записать:  $g(x) = 0x^3 + 2x^2 - 3x + 1$ ). В этом случае пишут:  $f(x) \neq g(x)$ . Не равны и многочлены  $h(x) = 2x^2 - 3x + 5$ ,  $s(x) = 2x^2 + 3x + 5$ , так как у них коэффициенты при  $x$  различны. А вот многочлены  $f_1(x) = 2x^5 + 3x^3 + bx + 3$  и  $g_1(x) = 2x^5 + ax^3 - 2x + 3$  равны тогда и только тогда, когда  $a = 3$ , а  $b = -2$ .

Пусть даны многочлен  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  и некоторое число  $c$ . Число  $f(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \dots + a_1 c + a_0$  называется значением многочлена  $f(x)$  при  $x = c$ .

Таким образом, чтобы найти  $f(c)$ , в многочлен вмес-

то  $x$  нужно подставить  $c$  и провести необходимые вычисления. Например, если  $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - x + 5$ , то  $f(-2) = 2(-2)^3 + 3(-2)^2 - (-2) + 5 = 3$ .

Рассмотрим многочлен  $f(x) = a$  и найдем, например,  $f(2)$ . Для этого в многочлен вместо  $x$  надо подставить число 2 и произвести необходимые вычисления. Однако в нашем случае  $f(x) = a$  и переменной  $x$  в явном виде нет. Как же быть? Вспомним, что рассматриваемый многочлен можно записать и в виде  $f(x) = 0x + a$ . Теперь все в порядке, можно подставлять значение  $x = 2$ :  $f(2) = 0 \cdot 2 + a = a$ . Заметим, что для данного многочлена  $f(c) = a$  при любом  $c$ . В частности, нулевой многочлен при любом  $c$  принимает значение, равное нулю.

Вообще говоря, многочлен при различных значениях переменной  $x$  может принимать различные значения. Нас же довольно часто будут интересовать те значения  $x$ , при которых многочлен принимает значение 0. Число  $c$  называется *корнем многочлена*  $f(x)$ , если  $f(c) = 0$ .

Например, если  $f(x) = x^2 - 3x + 2$ , то числа 1 и 2 являются корнями этого многочлена, ибо  $f(1) = 0$  и  $f(2) = 0$ . А вот многочлен  $f(x) = 5$  корней вообще не имеет. В самом деле, при любом значении  $x$  он принимает значение 5, а значит, никогда не принимает значение 0. Для нулевого же многочлена, как легко заметить, каждое число является корнем.

Поиск корней многочленов является одной из важнейших задач алгебры. Находить корни линейных двучленов и квадратных трехчленов учат еще в школе. Что касается многочленов более высоких степеней, то для них такая задача является весьма трудной и не всегда разрешимой. В дальнейшем мы неоднократно будем ею заниматься. А сейчас заметим только, что найти корни многочлена  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  и решить уравнение  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$  — это эквивалентные задачи. Поэтому, научившись нахо-

дить корни многочлена, мы научимся решать соответствующие уравнения, и наоборот.

Обращаем внимание читателя на различие между двумя утверждениями: «многочлен  $f(x)$  равен нулю (или, что то же самое, многочлен  $f(x)$  — нулевой)» и «значение многочлена  $f(x)$  при  $x = c$  равно нулю». Например, многочлен  $f(x) = x^2 - 1$  не равен нулю, ибо у него есть ненулевые коэффициенты, а его значение при  $x = 1$  равно нулю. Короче,  $f(x) \neq 0$ , а  $f(1) = 0$ .

Между понятиями равенства многочленов и значения многочлена существует тесная взаимосвязь. Если даны два равных многочлена  $f(x)$  и  $g(x)$ , то их соответствующие коэффициенты равны, а значит,  $f(c) = g(c)$  для каждого числа  $c$ . Верно ли обратное? Другими словами, если  $f(c) = g(c)$  для каждого числа  $c$ , то равны ли многочлены  $f(x)$  и  $g(x)$ ? Попробуем ответить на этот вопрос в частном случае, когда  $f(x) = px^2 + qx + r$ , а  $g(x) = kx + m$ . Так как  $f(c) = g(c)$  для каждого числа  $c$ , то, в частности,  $f(0) = g(0)$ ,  $f(1) = g(1)$ ,  $f(-1) = g(-1)$ . Вычислив фигурирующие в этих равенствах значения рассматриваемых многочленов, получим систему

$$\left. \begin{aligned} r &= m, \\ p + q + r &= k + m, \\ p - q + r &= -k + m. \end{aligned} \right\}$$

Из этой системы следует, что  $p = 0$ ,  $q = k$ ,  $r = m$ , а значит,  $f(x) = g(x)$ .

Таким образом, для рассмотренного примера ответ на поставленный вопрос положителен. Оказывается, это справедливо и в общем случае, что будет доказано немного позже, после ознакомления с некоторыми другими понятиями и утверждениями теории многочленов.

## Упражнения

4. Какие из следующих многочленов равны между собой:

$$f(x) = 0,5x^3 + 2x^2 - 5x + 7;$$

$$g(x) = \lg(\sqrt{10}/10) \cdot x^3 + \sqrt{4}x^2 + \sqrt{5}x + 7;$$

$$h(x) = \sin 30^\circ \cdot x^3 + \lg 100 \cdot x^2 - \sqrt{25}x + (\sqrt{7})^2;$$

$$s(x) = \cos 120^\circ \cdot x^3 + (1/\sin 30^\circ) x^2 + (5/\sqrt{5}) x + \sqrt{49};$$

$$p(x) = \cos 90^\circ \cdot x + 5;$$

$$q(x) = 5?$$

5. При каких  $a$ ,  $b$ ,  $c$  многочлены  $f(x) = ax^4 + bx^3 + 3x^2 + 5$  и  $g(x) = x^3 + (c-1)x^2 + 5$  равны между собой?

6. Найдите многочлен второй степени  $f(x)$ , если:

а)  $f(1) = 1$ ,  $f(2) = 2$ ,  $f(3) = 5$ ;

б)  $f(2) = 1$ ,  $f(3) = 0$ ,  $f(4) = 2$ .

7. Коэффициенты многочлена  $f(x)$  — натуральные числа, меньшие 10, и  $f(10) = 7345$ . Найдите  $f(x)$ .

8. Даны многочлены  $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3$  и  $g(x) = x^2 - x + 2$ . Найдите  $f(g(1))$ ,  $g(f(0))$ ,  $f(f(0))$ ,  $g(g(2))$ .

9. Докажите, что не существует многочлена второй степени, который при любом иррациональном значении переменной  $x$  принимает рациональные значения.

10. Найдите корни многочлена  $f(x)$ , если:

а)  $f(x) = 2x - 5$ ;

б)  $f(x) = 3x$ ;

в)  $f(x) = x^2 + 4x - 5$ ;

г)  $f(x) = x^2 - 9$ ;

д)  $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$ .

11. Найдите многочлен  $f(x) = 2x^3 + ax^2 - 8x + b$ , если число 2 — его корень и  $f(3) = 35$ .

12. Число  $c$  является корнем многочлена  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ . Укажите какой-либо корень многочлена  $g(x)$ , если:

а)  $g(x) = a_n x^n - a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + (-1)^n a_0$ ;

б)  $g(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$ ;

в)  $g(x) = 2^n a_n x^n + 2^{n-1} a_{n-1} x^{n-1} + \dots + 2a_1 x + a_0$ .

## ОПЕРАЦИИ НАД МНОГОЧЛЕНАМИ

Многочлены можно складывать, вычитать и умножать по обычным правилам раскрытия скобок и приведения подобных членов. При этом в результате снова получается многочлен. Указанные операции обладают известными читателю свойствами:

$$\begin{aligned}f(x) + g(x) &= g(x) + f(x), \\f(x) + (g(x) + h(x)) &= (f(x) + g(x)) + h(x), \\f(x)g(x) &= g(x)f(x), \\f(x)(g(x)h(x)) &= (f(x)g(x))h(x), \\f(x)(g(x) + h(x)) &= f(x)g(x) + f(x)h(x).\end{aligned}$$

Установим еще несколько полезных свойств операций над многочленами.

Пусть даны два многочлена  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ,  $a_n \neq 0$ , и  $g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0$ ,  $b_m \neq 0$ . Ясно, что ст.  $f(x) = n$ , а ст.  $g(x) = m$ . Нетрудно заметить, что если перемножить эти два многочлена, получится многочлен вида  $f(x)g(x) = a_n b_m x^{m+n} + \dots + a_0 b_0$ . Так как  $a_n \neq 0$  и  $b_m \neq 0$ , то  $a_n b_m \neq 0$ , а значит, ст.  $(f(x)g(x)) = m + n$ . Отсюда следует важное утверждение.

*Степень произведения двух ненулевых многочленов равна сумме степеней сомножителей, или, короче, ст.  $(f(x)g(x)) = \text{ст. } f(x) + \text{ст. } g(x)$ .*

Легко доказать, что аналогичное утверждение имеет место для любого конечного числа ненулевых сомножителей, т. е. что ст.  $(f_1(x)f_2(x) \dots f_s(x)) = \text{ст. } f_1(x) + \text{ст. } f_2(x) + \dots + \text{ст. } f_s(x)$ . В частности, ст.  $f^h(x) = h \text{ ст. } f(x)$ .

Из рассуждений, приведенных выше для степени произведения двух многочленов, следует два полезных

утверждения, которые легко распространяются на любое конечное число сомножителей.

*Старший член (коэффициент) произведения двух ненулевых многочленов равен произведению старших членов (коэффициентов) сомножителей.*

*Свободный член произведения двух многочленов равен произведению свободных членов сомножителей.*

Степени многочленов  $f(x)$ ,  $g(x)$  и  $f(x) \pm g(x)$  связаны следующим соотношением:  $\text{ст.}(f(x) \pm g(x)) \leq \leq \max\{\text{ст. } f(x), \text{ст. } g(x)\}$ . Предлагаем читателю доказать это соотношение самостоятельно.

Напомним, что многочлен — это выражение вида  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ . Будут ли многочленами выражения:  $2x^2 + 4 + 3x^3$ ;  $(x^2 - 1)(2x + 5)$ ;  $(x^2 + 1) \times \times (x - 3) + 2x$ ? Попробуем разобраться в этом.

Первое выражение можно рассматривать как сумму многочленов  $f_1(x) = 2x^2$ ,  $f_2(x) = 4$ ,  $f_3(x) = 3x^3$ . Но, как известно, сумма многочленов — это тоже многочлен. Значит, первое выражение можно считать неудачно записанным многочленом. Воспользовавшись тем, что при сложении многочленов слагаемые можно переставлять местами, получим  $2x^2 + 4 + 3x^3 = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) = = f_3(x) + f_1(x) + f_2(x) = 3x^3 + 2x^2 + 4$ . Аналогично второе выражение — это произведение многочленов  $g_1(x) = = x^2 - 1$  и  $g_2(x) = 2x + 5$ , а значит, тоже многочлен. Легко убедиться, что и третье выражение также является многочленом.

Теперь познакомимся с еще одной операцией над многочленами — суперпозицией.

*Суперпозицией многочленов  $f(x)$  и  $g(x)$  называется многочлен, обозначаемый  $f(g(x))$ , который получается, если в многочлене  $f(x)$  вместо  $x$  подставить многочлен  $g(x)$ .*

Например, если  $f(x) = x^2 + 2x - 1$  и  $g(x) = 2x + 3$ , то  $f(g(x)) = f(2x + 3) = (2x + 3)^2 + 2(2x + 3) - 1 =$

$$\begin{aligned}
 &= 4x^2 + 16x + 14, \\
 g(f(x)) &= g(x^2 + 2x - 1) = 2(x^2 + 2x - 1) + 3 = \\
 &= 2x^2 + 4x + 1.
 \end{aligned}$$

Видно, что  $f(g(x)) \neq g(f(x))$ , т. е. суперпозиция многочленов  $f(x)$ ,  $g(x)$  и суперпозиция многочленов  $g(x)$ ,  $f(x)$  различны. Таким образом, операция суперпозиции не обладает свойством переместительности.

## У п р а ж н е н и я

13. Даны многочлены  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 7x + 1$  и  $g(x) = 3x^2 + 2x + 5$ . Наиболее рациональным способом найдите:

- а)  $f(x) \pm g(x)$ ,  $f(x)g(x)$ ;
- б)  $f(x)g(x) + f(x)$ ,  $f^2(x) - f(x)$ .

14. Даны многочлены  $f(x)$  и  $g(x)$ , причем ст.  $f(x) = 5$  и ст.  $(f(x) + g(x)) = 7$ . Найдите ст.  $g(x)$ , ст.  $(f(x)g(x))$ .

15. Даны многочлены  $f(x)$  и  $g(x)$ , причем ст.  $(f(x)g(x)) = 5$  и ст.  $(f(x) + g(x)) = 3$ . Найдите ст.  $f(x)$  и ст.  $g(x)$ .

16. Найдите степень, старший коэффициент, свободный член и сумму коэффициентов многочлена  $f(x)$ , если:

- а)  $f(x) = (x^2 - x + 1)^{1985}$ ;
- б)  $f(x) = (2x^2 - 4x + 1)^{100}$ ;
- в)  $f(x) = (2x^2 - 3x + 1)^{1985} + (2x^3 + 3x - 4)^{1986}$ .

17. Найдите сумму коэффициентов многочлена  $f(x) = (x^2 - x + 1)^{100}$ :

- а) при четных степенях переменной  $x$ ;
- б) при нечетных степенях переменной  $x$ .

18. Укажите такой многочлен  $f(x)$ , для которого числа  $-1$ ,  $2$ ,  $3$ ,  $5$  являются корнями.

19. Укажите такой многочлен  $f(x)$ , который при  $x = 1, 2, 3, 4, 5$  принимает значение, равное  $7$ .

20. Укажите такой многочлен  $f(x)$ , который при  $x = 1, 2, 3, 4, 5$  принимает значения, равные соответственно  $1, 2, 3, 4, 5$ .

21. Найдите  $f(g(x))$ ,  $g(f(x))$  и  $f(f(x))$ , если  $f(x) = 2x - 1$ , а  $g(x) = x^3 + 2x + 3$ .

22. Докажите, что ст.  $f(g(x)) = \text{ст. } f(x) \cdot \text{ст. } g(x)$ .



23. Найдите все многочлены  $f(x)$ , для которых:

а)  $f(f(x)) = f^2(x)$ ;

б)  $f(2x) = 2f(x)$ .

### ДЕЛИМОСТЬ МНОГОЧЛЕНОВ

Если сравнить операции сложения и умножения многочленов с операциями соответственно сложения и умножения целых чисел, то можно заметить, что многие их свойства одинаковы. Например, переместительный закон имеет место для сложения и умножения как многочленов, так и чисел. Другими словами, операции над многочленами и соответствующие им операции над целыми числами в некотором смысле аналогичны друг другу. Но для целых чисел существует еще одна операция — деление (которая, правда, не всегда выполнима). Оказывается, и для многочленов можно ввести аналогичную операцию.

Говорят, что *многочлен  $f(x)$  делится на многочлен  $g(x)$ ,  $g(x) \neq 0$ , если существует такой многочлен  $s(x)$ , что  $f(x) = g(x)s(x)$* . В этом случае  $g(x)$  называют *делителем многочлена  $f(x)$* ,  $s(x)$  — *частным при делении  $f(x)$  на  $g(x)$* .

Например, многочлен  $f(x) = x^3 - 1$  делится на многочлен  $g(x) = x^2 + x + 1$ , ибо  $f(x) = g(x)(x - 1)$ . Здесь частное  $s(x) = x - 1$ .

Операция деления многочленов, как и операция деления целых чисел, не всегда выполнима. Например, многочлен  $f(x) = x^2 + 2$  не делится на многочлен  $g(x) = x^3 + 1$ . В самом деле, если предположить, что  $f(x)$  делится на  $g(x)$ , то  $f(x) = g(x)s(x)$  для некоторого многочлена  $s(x)$ . Тогда  $\text{ст. } f(x) = \text{ст. } g(x) + \text{ст. } s(x)$ , т. е.  $2 = 3 + \text{ст. } s(x)$ . Но последнее равенство неверно, ибо  $\text{ст. } s(x) \geq 0$ . Как легко заметить, ненулевой многочлен меньшей степени не делится на многочлен большей степени. Опять получили аналогию с целыми числами. Ведь

целое число, отличное от нуля, с меньшим модулем не делится на целое число с бóльшим модулем.

В дальнейшем очень часто вместо длинной фразы «многочлен  $f(x)$  делится на многочлен  $g(x)$ » будем писать:  $f(x) : g(x)$ . В этой записи символ  $:$  заменяет слово «делится на».

Укажем теперь некоторые свойства делимости многочленов.

1. Каждый многочлен  $f(x)$  делится на любой многочлен нулевой степени.

2. Если  $f(x) : g(x)$ , то  $(h(x)f(x)) : g(x)$  для любого многочлена  $h(x)$ .

3. Если  $f(x) : g(x)$  и  $h(x) : g(x)$ , то  $(f(x) \pm h(x)) : g(x)$ .

4. Если  $f(x) : g(x)$ , то либо  $f(x) = 0$ , либо ст.  $f(x) \geq$  ст.  $g(x)$ .

5. Если  $f(x) : g(x)$ , то  $f(x) : cg(x)$  для любого числа  $c \neq 0$ .

6. Если  $cf(x) : g(x)$ , где  $c$  — число, отличное от нуля, то  $f(x) : g(x)$ .

Мы привели далеко не все свойства делимости многочленов, а лишь те, которые будут использованы в дальнейшем. Нет необходимости проводить доказательства всех указанных свойств, так как эти доказательства очень похожи друг на друга. Докажем, например, первое свойство.

Пусть  $f(x)$  — произвольный многочлен и  $g(x) = c$ ,  $c \neq 0$ , — любой многочлен нулевой степени. Тогда  $f(x)$  можно представить в таком виде:  $f(x) = c \left( \frac{1}{c} f(x) \right) = g(x) \left( \frac{1}{c} f(x) \right)$ . А отсюда следует, что  $f(x) : g(x)$  и частное  $s(x) = (1/c) f(x)$ .

Теперь докажем второе свойство. Так как  $f(x) : g(x)$ , то  $f(x) = g(x) s(x)$  для некоторого многочлена  $s(x)$ . Тог-

да  $h(x)f(x) = g(x)(h(x)s(x))$ , т. е.  $(h(x)f(x)) : g(x)$  и частное в этом случае равно  $h(x)s(x)$ .

Докажем еще четвертое свойство. Дано, что  $f(x) : g(x)$ , т. е. существует такой многочлен  $s(x)$ , что  $f(x) = g(x)s(x)$ . Если  $f(x) = 0$ , то все уже доказано. Ведь нужно доказать, что либо  $f(x) = 0$ , либо  $\text{ст. } f(x) \geq \text{ст. } g(x)$ . Пусть теперь  $f(x) \neq 0$ . Тогда  $s(x) \neq 0$ , а  $g(x) \neq 0$  по определению делимости и можно применить теорему о степени произведения многочленов. Из этой теоремы и равенства  $f(x) = g(x)s(x)$  следует:  $\text{ст. } f(x) = \text{ст. } g(x) + \text{ст. } s(x)$ . Так как  $\text{ст. } s(x) \geq 0$ , то из последнего равенства и получаем, что  $\text{ст. } f(x) \geq \text{ст. } g(x)$ .

Доказательство остальных свойств делимости многочленов оставим читателю в качестве упражнения.

## Упражнения

24. Докажите, что если:

- а)  $f(x) : g(x)$  и  $g(x) : h(x)$ , то  $f(x) : h(x)$ ;
- б)  $(f(x) \pm g(x)) : h(x)$  и  $f(x) : h(x)$ , то  $g(x) : h(x)$ ;
- в)  $f(x) : g(x)$ , то  $(h(x)f(x)) : (h(x)g(x))$  для любого ненулевого многочлена  $h(x)$ ;
- г)  $f(x) : g(x)$  и  $h(x) : g(x)$ , то  $(u(x)f(x) + v(x)h(x)) : g(x)$  для любых многочленов  $u(x)$  и  $v(x)$ ;
- д)  $f(x) : g(x)$  и  $\text{ст. } f(x) = \text{ст. } g(x)$ , то  $f(x) = cg(x)$  для некоторого числа  $c$ ;
- е)  $f(x) : g(x)$  и  $g(x) : f(x)$ , то  $f(x) = cg(x)$  для некоторого числа  $c$ .

25. Докажите, что:

- а) нулевой многочлен делится на любой ненулевой многочлен;
- б) всякий многочлен  $n$ -й степени имеет бесконечно много делителей  $n$ -й степени.

26. Верны ли следующие утверждения:

- а) если  $f(x) : g(x)$  и  $f(x) : h(x)$ , то  $f(x) : (g(x)h(x))$ ;
- б) если  $(f(x) + g(x)) : h(x)$ , то  $f(x) : h(x)$  и  $g(x) : h(x)$ ;
- в) если  $(f(x)g(x)) : h(x)$ , то  $f(x) : h(x)$  или  $g(x) : h(x)$ ?

27. Докажите, что если  $f(x) : g(x)$  и число  $c$  — корень многочлена  $g(x)$ , то  $c$  — корень  $f(x)$ .

28. Докажите, что если  $f(x) : g(x)$  и  $c$  — корень многочлена  $f(x)$ , то  $c$  — корень либо многочлена  $g(x)$ , либо частного от деления  $f(x)$  на  $g(x)$ .

## МЕТОД НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Довольно часто возникает необходимость выяснить, делится ли данный многочлен  $f(x)$  на многочлен  $g(x)$ . Существует несколько способов решения этой задачи. Одним из них является *метод неопределенных коэффициентов*. Поясним суть этого метода на примерах.

Выясним, делится ли многочлен  $f(x) = 3x^4 + 15x^3 - 30x - 12$  на многочлен  $g(x) = x^2 + 5x + 2$ . Пусть  $f(x) : g(x)$ . Тогда существует такой многочлен  $s(x)$ , что  $f(x) = g(x)s(x)$ . Так как  $\text{ст. } f(x) = \text{ст. } g(x) + \text{ст. } s(x)$ ,  $\text{ст. } f(x) = 4$ , а  $\text{ст. } g(x) = 2$ , то  $\text{ст. } s(x) = 2$ . Значит,  $s(x) = ax^2 + bx + c$ . (Здесь коэффициенты  $a, b, c$  неизвестны, не определены. Отсюда и происходит название рассматриваемого метода.) Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} 3x^4 + 15x^3 - 30x - 12 &= \\ &= (x^2 + 5x + 2)(ax^2 + bx + c). \end{aligned}$$

Перемножим многочлены в правой части этого равенства:

$$\begin{aligned} 3x^4 + 15x^3 - 30x - 12 &= ax^4 + (5a + b)x^3 + \\ &+ (2a + 5b + c)x^2 + (2b + 5c)x + 2c. \end{aligned}$$

Используя далее определение равенства двух многочленов, получаем следующую систему уравнений с неизвестными  $a, b, c$ :

$$\left. \begin{aligned} a + & & & = 3, \\ 5a + b & & = 15, \\ 2a + 5b + c & = 0, \\ & 2b + 5c = -30, \\ & 2c = -12. \end{aligned} \right\}$$

Легко находим решение этой системы:  $a = 3$ ,  $b = 0$ ,  $c = -6$ , а значит,  $s(x) = 3x^2 - 6$ .

Таким образом, предположив, что  $f(x)$  делится на  $g(x)$ , мы получили равенство  $f(x) = g(x)(3x^2 - 6)$ . Осталось непосредственным преобразованием правой части убедиться, что оно верно. А так как это равенство действительно верно, то  $f(x)$  делится на  $g(x)$ .

Рассмотрим теперь несколько иную задачу, при решении которой так же можно использовать метод неопределенных коэффициентов. Пусть  $f(x) = x^4 + px^2 + q$ ,  $g(x) = x^2 + x + 1$ . При каких  $p$  и  $q$  многочлен  $f(x)$  делится на  $g(x)$ ? Здесь мы тоже не можем сразу дать ответ, но опять-таки предположим, что  $p$  и  $q$  такие, что  $f(x)$  делится на  $g(x)$ . Тогда  $f(x) = g(x)s(x)$  для некоторого многочлена  $s(x)$ . Точно так же, как и при решении первой задачи, устанавливаем, что  $s(x) = ax^2 + bx + c$ . Тогда

$$x^4 + px^2 + q = (x^2 + x + 1)(ax^2 + bx + c) \quad (1)$$

или

$$\begin{aligned} x^4 + px^2 + q &= ax^4 + (a + b)x^3 + \\ &+ (a + b + c)x^2 + (b + c)x + c. \end{aligned}$$

Отсюда получаем систему

$$\left. \begin{aligned} a &= 1, \\ a + b &= 0, \\ a + b + c &= p, \\ b + c &= 0, \\ c &= q. \end{aligned} \right\}$$

Решив ее, находим:  $a = 1$ ,  $b = -1$ ,  $c = 1$ ,  $p = q = 1$ .

Таким образом, если  $f(x) : g(x)$ , то  $p = q = 1$ . Теперь нужно убедиться в обратном, т. е. в том, что если  $p = q = 1$ , то  $f(x)$  делится на  $g(x)$ . Для этого подставляем  $p = q = 1$  и найденные значения  $a$ ,  $b$ ,  $c$  в соотношение (1) и получаем

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1).$$

Перемножив многочлены в правой части этого равенства, увидим, что оно верно, а значит,  $f(x) : g(x)$ .

Следовательно,  $f(x)$  делится на  $g(x)$  тогда и только тогда, когда  $p = q = 1$ .

Из школьного курса математики известно понятие разложения многочлена на множители. Напомним, что разложить многочлен на множители — это значит представить его в виде произведения двух или более многочленов ненулевой степени. Оказывается, метод неопределенных коэффициентов можно использовать и для решения некоторых задач такого типа.

Пусть требуется разложить многочлен  $f(x) = x^3 - 4x^2 + 2x + 1$  на множители с целыми коэффициентами. Мы не знаем, можно это сделать или нет, но, как и ранее, предполагаем, что подобное разложение возможно. Значит, существуют многочлены  $g(x)$  и  $h(x)$  с целыми коэффициентами, такие, что ст.  $g(x) > 0$ , ст.  $h(x) > 0$  и  $f(x) = g(x)h(x)$ . Тогда ст.  $f(x) =$  ст.  $g(x) +$  ст.  $h(x)$  и, так как ст.  $f(x) = 3$ , возможны следующие случаи: ст.  $g(x) = 1$  и ст.  $h(x) = 2$ ; ст.  $g(x) = 2$  и ст.  $h(x) = 1$ . В первом случае предполагается, что данный многочлен представим в виде произведения многочленов первой и второй степени, во втором — в виде произведения многочленов второй и первой степени. Таким образом, между этими двумя случаями нет принципиальной разницы. Поэтому будем считать, что ст.  $g(x) = 1$  и ст.  $h(x) = 2$ .

Значит, многочлены  $g(x)$  и  $h(x)$  имеют вид:  $g(x) = mx + n$ ,  $h(x) = ax^2 + bx + c$ , где  $m, n, a, b, c$  — целые числа. Тогда

$$x^3 - 4x^2 + 2x + 1 = (mx + n)(ax^2 + bx + c)$$

или

$$\begin{aligned} x^3 - 4x^2 + 2x + 1 &= \\ &= amx^3 + (an + bm)x^2 + (bn + cm)x + cn. \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\left. \begin{aligned} am &= 1, \\ an + bm &= -4, \\ bn + cm &= 2, \\ cn &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Осталось решить в целых числах полученную систему. Из первого уравнения системы следует, что  $a = m = 1$  или  $a = m = -1$ . Если  $a = m = -1$ , то разложение  $f(x) = g(x)h(x)$  можно записать в виде  $f(x) = (-1)g(x)(-1)h(x)$ . Обозначим  $(-1)g(x) = g_1(x)$  и  $(-1)h(x) = h_1(x)$ . Тогда  $f(x) = g_1(x)h_1(x)$  и старшие коэффициенты многочленов  $g_1(x)$  и  $h_1(x)$  равны 1. Следовательно, достаточно рассмотреть случай  $a = m = 1$ . Тогда система (2) принимает вид

$$\left. \begin{aligned} n + b &= -4, \\ bn + c &= 2, \\ cn &= 1. \end{aligned} \right\}$$

Из последнего уравнения следует, что  $c = n = 1$  или  $c = n = -1$ . Если  $c = n = 1$ , то система имеет вид

$$\left. \begin{aligned} b + 1 &= -4, \\ b + 1 &= 2, \end{aligned} \right\}$$

а тогда из первого уравнения следует, что  $b = -5$ , из второго —  $b = 1$ . Значит, случай  $c = n = 1$  невозможен.

Пусть теперь  $c = n = -1$ . Тогда получаем систему

$$\left. \begin{aligned} b - 1 &= -4, \\ -b - 1 &= 2. \end{aligned} \right\}$$

Отсюда находим, что  $b = -3$ .

Таким образом,  $a = 1$ ,  $b = -3$ ,  $c = -1$ ,  $m = 1$ ,  $n = -1$ , т. е.

$$x^3 - 4x^2 + 2x + 1 = (x - 1)(x^2 - 3x - 1). \quad (3)$$

Напомним, что заранее не было известно, можно ли данный многочлен  $f(x)$  разложить на множители с целыми коэффициентами. Решение мы начали с предположения, что подобное разложение возможно. Поэтому можно сделать лишь такой вывод: если разложение данного многочлена на множители с целыми коэффициентами возможно, то оно имеет вид (3). Теперь мы должны показать, что равенство (3) верно, т. е. что оно действительно дает разложение многочлена  $f(x)$ . Для этого нужно перемножить многочлены в правой части и посмотреть, равно ли полученное произведение  $f(x)$ . Проведем все это, убедимся в справедливости искомого разложения.

## Упражнения

29. Делится ли многочлен  $f(x)$  на  $g(x)$ , если:

а)  $f(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 + 7x - 2$ ,  $g(x) = x^2 + 3x - 2$ ;

б)  $f(x) = 2x^3 + x^2 - x + 3$ ,  $g(x) = x^2 - x + 1$ ?

30. При каких целых  $p$  и  $q$  многочлен  $f(x)$  делится на  $g(x) = x^2 + x + 1$ , если:

а)  $f(x) = x^4 + px + q$ ;

б)  $f(x) = x^5 + px^2 + q$ ;

в)  $f(x) = x^5 + px + q$ ?



31. При каких целых  $a$  и  $b$  многочлен  $f(x) = x^5 + a$  делится на  $g(x) = x^2 + bx + 1$ ?

32. Разложите многочлен  $f(x)$  на множители с целыми коэффициентами, если:

а)  $f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 2$ ;                      б)  $f(x) = 2x^3 - 7x^2 + 5x - 1$ ;

в)  $f(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1$ .

## ДЕЛЕНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ С ОСТАТКОМ

Понятие делимости одного многочлена на другой мы ввели аналогично понятию делимости целых чисел. Более того, если внимательно проанализировать свойства этой операции для многочленов и для чисел, можно заметить, что они одинаковы. В частности, и в том, и в другом случае операция деления не всегда выполнима. Но для целых чисел возможно деление с остатком, т. е. для любых целых  $a$  и  $b$  ( $b \neq 0$ ) существуют такие целые числа  $s$  и  $r$ , что  $a = bs + r$  и  $0 \leq r < |b|$ . Оказывается, что аналогичное понятие можно ввести и для многочленов.

*Разделить с остатком многочлен  $f(x)$  на ненулевой многочлен  $g(x)$  — это значит найти два таких многочлена  $s(x)$  и  $r(x)$ , что  $f(x) = g(x)s(x) + r(x)$  и либо  $r(x) = 0$ , либо  $\text{ст. } r(x) < \text{ст. } g(x)$ .*

Это определение можно сформулировать несколько иначе.

*Разделить с остатком многочлен  $f(x)$  на ненулевой многочлен  $g(x)$  — это значит представить  $f(x)$  в виде  $f(x) = g(x)s(x) + r(x)$ , где  $s(x)$  и  $r(x)$  — многочлены и либо  $r(x) = 0$ , либо  $\text{ст. } r(x) < \text{ст. } g(x)$ .*

Так же, как и для целых чисел,  $s(x)$  назовем *неполным частным*, а  $r(x)$  — *остатком при делении  $f(x)$  на  $g(x)$* .

Например, если  $f(x) = x^3 - 1$ ,  $g(x) = x^2 + 3x + 1$ , то,

как легко проверить, верно равенство  $f(x) = g(x)(x-3) + 8x + 2$ . Так как  $\text{ст.}(8x + 2) = 1 < \text{ст.} g(x)$ , то это равенство означает, что мы разделили  $f(x)$  на  $g(x)$  с остатком. При этом получили неполное частное  $s(x) = x - 3$  и остаток  $r(x) = 8x + 2$ .

Итак, мы определили деление многочленов с остатком, привели соответствующий пример. Однако возникает вопрос, всегда ли оно возможно? Другими словами, для любых ли многочленов  $f(x)$  и  $g(x)$ ,  $g(x) \neq 0$ , можно найти такие многочлены  $s(x)$  и  $r(x)$ , которые удовлетворяют условиям нашего определения? Если да, то однозначно ли они определяются? Или, по-иному, могут ли для  $f(x)$  и  $g(x)$  существовать другие многочлены  $s_1(x)$  и  $r_1(x)$ , удовлетворяющие условиям определения? Ответы на эти вопросы дает следующее утверждение.

*Для любых многочленов  $f(x)$  и  $g(x)$ ,  $g(x) \neq 0$ , деление  $f(x)$  на  $g(x)$  с остатком возможно, причем однозначно.*

Доказательство этого утверждения мы разобьем на две части: в первой докажем возможность деления  $f(x)$  на  $g(x)$  с остатком, а во второй — его однозначность.

Возможность деления с остатком будем доказывать, указав способ (алгоритм) отыскания неполного частного и остатка. Рассмотрим следующие случаи.

1. Пусть  $f(x) = 0$ . Тогда верно равенство  $f(x) = g(x) \cdot 0 + 0$ . Оно означает, что при делении  $f(x)$  на  $g(x)$  мы получили неполное частное  $s(x) = 0$  и остаток  $r(x) = 0$ . Таким образом, в рассматриваемом случае деление с остатком возможно.

2. Пусть  $\text{ст.} f(x) < \text{ст.} g(x)$ . В этом случае верно равенство  $f(x) = g(x) \cdot 0 + f(x)$ . Так как  $\text{ст.} f(x) < \text{ст.} g(x)$ , то мы разделили  $f(x)$  на  $g(x)$  с остатком и  $s(x) = 0$ ,  $r(x) = f(x)$ .

3. Пусть  $\text{ст.} f(x) \geq \text{ст.} g(x)$  и

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0, \\ g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0, \quad b_m \neq 0.$$

Как видно, ст.  $f(x) = n$ , ст.  $g(x) = m$  и, значит,  $n \geq m$ .

Укажем способ нахождения неполного частного и остатка при делении  $f(x)$  на  $g(x)$ .

Подберем такой многочлен  $h_1(x)$ , чтобы старший член произведения  $h_1(x)g(x)$  был равен старшему члену многочлена  $f(x)$ . Если обозначить старший член искомого многочлена через  $px^k$ , то из доказанного ранее утверждения о старшем члене произведения следует, что должно выполняться равенство  $px^k \cdot b_m x^m = a_n x^n$ . Отсюда получаем, что  $px^k = \frac{a_n}{b_m} x^{n-m}$  и, следовательно, можно поло-

жить  $h_1(x) = \frac{a_n}{b_m} x^{n-m}$ , т. е.  $h_1(x)$  — это частное от деления старшего члена многочлена  $f(x)$  на старший член многочлена  $g(x)$ . Рассмотрим теперь такой многочлен:  $f_1(x) = f(x) - h_1(x)g(x)$ . Так как старшие члены многочленов  $f(x)$  и  $h_1(x)g(x)$  совпадают, то в разность  $f(x) - h_1(x)g(x)$  член с  $x^n$  не войдет. Значит, либо ст.  $f_1(x) <$  ст.  $f(x)$ , либо  $f_1(x) = 0$ .

Если  $f_1(x) \neq 0$  и ст.  $f_1(x) \geq$  ст.  $g(x)$ , то подберем многочлен  $h_2(x)$ , такой, чтобы старшие члены многочленов  $f_1(x)$  и  $h_2(x)g(x)$  совпадали. Повторив предыдущие рассуждения, получим, что в качестве  $h_2(x)$  можно взять частное от деления старшего члена многочлена  $f_1(x)$  на старший член многочлена  $g(x)$ . Тогда рассмотрим многочлен  $f_2(x) = f_1(x) - h_2(x)g(x)$ . Так как старшие члены многочленов  $f_1(x)$  и  $h_2(x)g(x)$  совпадают, то либо ст.  $f_2(x) <$  ст.  $f_1(x)$ , либо  $f_2(x) = 0$ .

Если  $f_2(x) \neq 0$  и ст.  $f_2(x) \geq$  ст.  $g(x)$ , применим к многочленам  $f_2(x)$  и  $g(x)$  те же рассуждения, что и выше. В результате получим многочлен  $f_3(x) = f_2(x) - h_3(x)g(x)$ , и либо ст.  $f_3(x) <$  ст.  $f_2(x)$ , либо  $f_3(x) = 0$  и т. д. Так как

в наших рассуждениях ст.  $\dot{f}(x) > \text{ст. } \dot{f}_1(x) > \text{ст. } \dot{f}_2(x) > \text{ст. } \dot{f}_3(x) > \dots$  и степени многочленов — целые неотрицательные числа, то на каком-то  $s$ -м этапе рассуждений получим многочлен  $\dot{f}_s(x) = \dot{f}_{s-1}(x) - h_s(x)g(x)$ , который либо равен нулю, либо его степень меньше степени многочлена  $g(x)$ . После этого мы не сможем продолжать рассуждения, ибо нельзя подобрать такой многочлен  $h_{s+1}(x)$ , чтобы старшие члены многочленов  $\dot{f}_s(x)$  и  $h_{s+1}(x)g(x)$  совпадали.

Таким образом, в результате получаем следующую систему равенств:

$$\left. \begin{aligned} f(x) - h_1(x)g(x) &= f_1(x), \\ f_1(x) - h_2(x)g(x) &= f_2(x), \\ f_2(x) - h_3(x)g(x) &= f_3(x), \\ &\vdots \\ f_{s-2}(x) - h_{s-1}(x)g(x) &= f_{s-1}(x), \\ f_{s-1}(x) - h_s(x)g(x) &= f_s(x). \end{aligned} \right\}$$

Сложим эти равенства почленно, сократив в обеих частях  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$ ,  $\dots$ ,  $f_{s-1}(x)$ . Затем перенесем члены, содержащие  $g(x)$ , в правую часть и вынесем  $g(x)$  за скобку. Получим

$$f(x) = g(x)(h_1(x) + h_2(x) + \dots + h_s(x)) + f_s(x).$$

Так как либо  $\text{ст. } f_s(x) < \text{ст. } g(x)$ , либо  $f_s(x) = 0$ , то последнее равенство означает, что  $f(x)$  делится с остатком на  $g(x)$ , причем  $s(x) = h_1(x) + h_2(x) + \dots + h_s(x)$  — неполное частное, а  $r(x) = f_s(x)$  — остаток.

Следовательно, возможность деления с остатком доказана для любых многочленов  $f(x)$  и  $g(x)$ ,  $g(x) \neq 0$ . Алгоритм деления с остатком приведен ниже.

**Шаг 1.** Разделить старший член многочлена  $f(x)$  на старший член многочлена  $g(x)$  (результат записать, так как это член неполного частного).

Шаг 2. Умножить  $g(x)$  на результат шага 1.

Шаг 3. Вычесть из  $f(x)$  результат шага 2.

Шаг 4. Проверить, имеет ли результат шага 3 степень, меньшую, чем степень многочлена  $g(x)$ , или он нулевой. Тогда: а) если да, то он является остатком и вычисления прекратить; б) если нет, то перейти к шагу 1, рассматривая результат шага 3 как многочлен  $f(x)$ .

Деление многочленов с остатком обычно выполняют по схеме деления «углом». Рассмотрим пример деления по этой схеме для многочленов  $f(x) = 2x^4 + 3x^2 + 2$  и  $g(x) = x^2 - x + 1$ :

$$\begin{array}{rcll}
 f(x) & \rightarrow & 2x^4 & + 3x^2 & + 2 & \Bigg| & x^2 - x + 1 \leftarrow g(x) \\
 \hline
 h_1(x)g(x) & \rightarrow & 2x^4 - 2x^3 + 2x^2 & & & & 2x^2 + 2x + 3 \leftarrow s(x) \\
 f_1(x) & \rightarrow & 2x^3 & + x^2 & + 2 & & \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ h_1(x) & h_2(x) & h_3(x) \end{array} \\
 \hline
 h_2(x)g(x) & \rightarrow & 2x^3 - 2x^2 + 2x & & & & \\
 f_2(x) & \rightarrow & 3x^2 - 2x + 2 & & & & \\
 \hline
 h_3(x)g(x) & \rightarrow & 3x^2 - 3x + 3 & & & & \\
 f_3(x) & \rightarrow & x - 1 & & & & \leftarrow r(x)
 \end{array}$$

Получили неполное частное  $s(x) = 2x^2 + 2x + 3$  и остаток  $r(x) = x - 1$ , т. е.  $f(x) = g(x)(2x^2 + 2x + 3) + x - 1$ .

При делении «углом» многочлена  $f(x)$  на многочлен  $g(x)$  желательно придерживаться следующих рекомендаций.

1. В записи многочлена  $f(x)$  оставлять место для членов с нулевыми коэффициентами. Так, в примере, рассмотренном выше, при записи  $f(x)$  мы оставили место для членов  $0x^3, 0x$ .

2. При записи многочлена  $h_{k+1}(x)g(x)$  под многочле-

ном  $f_k(x)$  подобные члены записывать друг под другом.

Выполнение этих рекомендаций несколько облегчит вычисления.

А теперь вернемся к доказательству нашего утверждения. Нужно еще доказать однозначность деления с остатком.

Пусть даны две пары многочленов  $s_1(x)$ ,  $r_1(x)$  и  $s_2(x)$ ,  $r_2(x)$ , удовлетворяющих условиям деления  $f(x)$  на  $g(x)$  с остатком, т. е.  $f(x) = g(x)s_1(x) + r_1(x)$  и либо  $r_1(x) = 0$ , либо ст.  $r_1(x) < \text{ст. } g(x)$ ;  $f(x) = g(x)s_2(x) + r_2(x)$  и либо  $r_2(x) = 0$ , либо ст.  $r_2(x) < \text{ст. } g(x)$ . Тогда  $g(x)s_1(x) + r_1(x) = g(x)s_2(x) + r_2(x)$ , или  $g(x)(s_1(x) - s_2(x)) = r_2(x) - r_1(x)$ . Из последнего равенства следует, что  $r_2(x) - r_1(x)$  делится на  $g(x)$ . Значит, либо  $r_2(x) - r_1(x) = 0$ , либо ст.  $(r_2(x) - r_1(x)) \geq \text{ст. } g(x)$ . Однако из записанных выше соотношений для  $r_1(x)$ ,  $r_2(x)$  и их степеней следует, что ст.  $(r_2(x) - r_1(x)) < \text{ст. } g(x)$ . Следовательно,  $r_2(x) - r_1(x) = 0$ , т. е.  $r_1(x) = r_2(x)$ . Но тогда  $g(x)(s_1(x) - s_2(x)) = 0$  и, поскольку  $g(x) \neq 0$ , то  $s_1(x) - s_2(x) = 0$ , т. е.  $s_1(x) = s_2(x)$ .

Итак, однозначность деления с остатком доказана.

Нетрудно заметить взаимосвязь между делимостью многочленов и делением их с остатком.

*Многочлен  $f(x)$  делится на многочлен  $g(x)$  тогда и только тогда, когда остаток при делении  $f(x)$  на  $g(x)$  равен нулю.*

Теперь, если нужно выяснить, делится ли многочлен  $f(x)$  на  $g(x)$ , то достаточно разделить  $f(x)$  на  $g(x)$  «углом» и посмотреть, каким будет остаток.

Мы выяснили, при каких  $p$  и  $q$  многочлен  $f(x) = x^4 + px^2 + q$  делится на многочлен  $g(x) = x^2 + x + 1$ . Эта задача была решена методом неопределенных коэффициентов. Теперь решим ее иначе. Разделим  $f(x)$  на  $g(x)$  с остатком:

$$\begin{array}{r}
\begin{array}{r}
x^4 \qquad \qquad + \quad px^2 \qquad + q \\
x^4 + x^3 \qquad + \quad x^2
\end{array}
\left| \begin{array}{l} x^2 + x + 1 \\ x^2 - x + p \end{array} \right. \\
\hline
\begin{array}{r}
-x^3 + (p-1)x^2 \qquad + q \\
-x^3 \qquad \qquad - x^2 - x
\end{array} \\
\hline
\begin{array}{r}
\qquad \qquad \qquad px^2 + x + q \\
\qquad \qquad \qquad - px^2 + px + p
\end{array} \\
\hline
\qquad \qquad \qquad (1-p)x + (q-p)
\end{array}$$

Итак,  $f(x)$  делится на  $g(x)$  тогда и только тогда, когда остаток  $r(x) = (1-p)x + (q-p)$  — нулевой многочлен, т. е. когда все его коэффициенты равны нулю. Отсюда имеем  $1-p=0$  и  $q-p=0$ , или  $p=q=1$ .

Сделаем еще несколько важных замечаний. Вернемся к алгоритму деления  $f(x)$  на  $g(x)$  с остатком. Чтобы получить неполное частное и остаток, т. е. их коэффициенты, мы, используя указанный алгоритм, производим над коэффициентами многочленов  $f(x)$  и  $g(x)$  только операции сложения, вычитания, умножения и деления. Но результат этих операций над рациональными числами — рациональное число. Таким образом, мы приходим к двум важным выводам.

*Если  $f(x)$  и  $g(x)$ ,  $g(x) \neq 0$ , — многочлены с рациональными коэффициентами, то неполное частное и остаток при делении  $f(x)$  на  $g(x)$  — тоже многочлены с рациональными коэффициентами.*

*Если  $f(x)$  и  $g(x)$  — многочлены с целыми коэффициентами и старший коэффициент многочлена  $g(x)$  равен 1, то неполное частное и остаток при делении  $f(x)$  на  $g(x)$  — многочлены с целыми коэффициентами.*

Сформулированные утверждения будут использованы в дальнейшем.

И, наконец, последнее. Если ст.  $f(x) <$  ст.  $g(x)$  или

$f(x) = 0$ , то, как мы установили, неполное частное при его делении на  $g(x)$  равно 0. Если же ст.  $f(x) \geq$  ст.  $g(x)$ , то старший член неполного частного равен  $\frac{a_n}{b_m} x^{n-m}$ , где  $a_n, b_m$  — старшие коэффициенты;  $n, m$  — степени многочленов  $f(x)$  и  $g(x)$  соответственно. Таким образом, в рассмотренном случае степень неполного частного при делении  $f(x)$  на  $g(x)$  равна ст.  $f(x)$  — ст.  $g(x)$ .

## У п р а ж н е н и я

33. Разделите с остатком  $f(x)$  на  $g(x)$ , если:

а)  $f(x) = 2x^3 + 1, g(x) = x^4 + 2x - 3$ ;

б)  $f(x) = 3, g(x) = 2x^2 + 1$ ;

в)  $f(x) = 2x^3 + x^2 + x + 1, g(x) = x^3 + x + 1$ ;

г)  $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3, g(x) = 2x^3 - x + 1$ ;

д)  $f(x) = x^5 + 2x^3 - x^2 + 4, g(x) = x^3$ ;

е)  $f(x) = 2x^5 + 3x^3 + 2x^2 - x + 5, g(x) = x^3 - 2x + 1$ .

34. При каких значениях  $a$  многочлен  $f(x) = x^6 + x^3 + a$  делится на  $g(x) = x^3 + 2$ ?

35. При каких значениях  $a$  и  $b$  многочлен  $f(x)$  делится на  $g(x) = x^2 + ax + 1$ , если:

а)  $f(x) = x^4 + b$ ;

б)  $f(x) = x^4 - 7x^2 + b$ .

36. При каких значениях  $a$  и  $b$  многочлен  $f(x) = x^3 + 2x^2 + ax + b$  делится на  $g(x) = x^2 + x + ab$ ?

37. Докажите, что многочлен  $f(x) = x^6 + x^3 + a$  не делится на многочлен  $g(x) = x^3 + x + a$  при любых значениях  $a$ .

38. Даны многочлены  $f(x)$  и  $g(x)$ , причем ст.  $f(x) = 10$ , а ст.  $g(x) = 4$ . При делении  $f(x)$  на  $g(x)$  получены неполное частное  $s(x)$  и остаток  $r(x)$ . Найдите неполное частное и остаток при делении  $f(x)$  на  $s(x)$ .

39. При делении  $f(x)$  на  $g(x)$  получены неполное частное  $s(x)$  и остаток  $r(x)$ . Найдите неполное частное и остаток при делении  $af(x)$  на  $bg(x)$ , где  $a, b$  — числа и  $b \neq 0$ .

40. При делении  $f(x)$  на  $g(x)$  получены неполное частное  $s(x) = x^2 + 1$  и остаток  $r(x) = x^3 + 5x$ . Найдите остаток при делении  $f(x)$  на  $s(x)$ .

41. При делении  $f(x)$  на  $g(x)$  получен остаток  $2x^2 - x + 1$ . Найдите остаток при делении  $f^2(x)$  на  $g(x)$ , если ст.  $g(x) = 5$ .



42. При делении  $f(x)$  на  $g(x)$  получен остаток 2, а при делении  $f^2(x)$  на  $g^2(x)$  — остаток 4. Найдите остаток при делении  $f(x)$  на  $g^2(x)$ .

43. При делении  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  на  $g(x)$  получены неполные частные  $s_1(x)$ ,  $s_2(x)$  и остатки  $r_1(x)$ ,  $r_2(x)$  соответственно. Найдите неполное частное и остаток при делении  $2f_1(x) - 3f_2(x)$  на  $g(x)$ .

44. Найдите остаток при делении  $f(x)$  на  $g(x)$ , если:

а)  $f(x) = x^{52} - 4x^{31} + 5$ ,  $g(x) = x^2 - 1$ ;

б)  $f(x) = x^{16} + 2x^{15} - x^8 - 2x^7 + x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1$ ,  $g(x) = x^2 + x - 2$ ;

в)  $f(x) = 2^{100}x^{100} + 2^{99}x^{99} + \dots + 2^2x^2 + 2x + 1$ ,  $g(x) = 2x + 1$ .

45. При делении  $f(x)$  на  $x + 1$ ,  $x - 1$ ,  $x + 3$  остатки равны 5,  $-4$ , 6 соответственно. Найдите остаток при делении  $f(x)$  на  $(x^2 - 1)(x + 3)$ .

46. При делении многочлена  $ax^3 + bx - 1$  на  $x^2 - 3x + 2$  остаток равен 7. Найдите  $a$  и  $b$ .

47. При каких  $a$  многочлены  $f(x) = x^3 + x^2 + ax - 4$  и  $g(x) = x^2 + x - a$  имеют общий корень?

### ТЕОРЕМА БЕЗУ \*

Пусть  $f(x)$  — произвольный многочлен. Разделим его с остатком на линейный двучлен  $x - c$ . Так как степень этого двучлена равна 1, то остаток либо равен нулю, либо имеет степень 0. И в том, и в другом случае остаток — это число, которое мы обозначим  $r$ . Следовательно, имеем

$$f(x) = (x - c)s(x) + r.$$

Так как многочлены, стоящие в левой и правой частях последнего выражения, равны, то они принимают равные значения при одних и тех же значениях переменной  $x$ , в частности при  $x = c$ . Тогда

$$f(c) = (c - c)s(c) + r,$$

$$\text{т. е. } r = f(c).$$

---

\* Безу Этьенн (1730—1783) — французский математик.

Итак, доказано важное утверждение, которое называется *теоремой Безу*.

*Остаток при делении многочлена  $f(x)$  на линейный двучлен  $x - c$  равен  $f(c)$ .*

Определим, например, остаток при делении многочлена  $f(x) = x^{1985} - 2x^{985} + 5$  на  $x - 1$ . По теореме Безу этот остаток  $r = f(1) = 4$ . Найдем теперь остаток при делении того же многочлена  $f(x)$  на  $x + 1$ . Теорема Безу дает возможность отыскать остаток при делении на двучлен вида  $x - c$ , поэтому представим  $x + 1$  в виде  $x + 1 = x - (-1)$ . Тогда  $c = -1$  и искомый остаток  $r = f(-1) = 6$ .

Из теоремы Безу вытекает интересное следствие.

*Число  $c$  является корнем многочлена  $f(x)$  тогда и только тогда, когда  $f(x)$  делится на  $x - c$ .*

В самом деле, если  $c$  — корень  $f(x)$ , то  $f(c) = 0$ . Но ведь  $f(c)$  — остаток при делении  $f(x)$  на  $x - c$ . Значит, этот остаток равен нулю, т. е.  $f(x)$  делится на  $x - c$ .

Обратно, пусть  $f(x)$  делится на  $x - c$ . Тогда  $f(x) = (x - c)s(x)$  для некоторого многочлена  $s(x)$ . Отсюда следует, что  $f(c) = (c - c)s(c) = 0 \cdot s(c) = 0$ , т. е.  $c$  — корень многочлена  $f(x)$ .

Теорема Безу и ее следствие играют важную роль и в самой теории многочленов, и при решении разнообразных задач. Рассмотрим несколько примеров.

1. Решить уравнение  $2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = 0$ .

Как мы уже отмечали, эта задача равносильна задаче нахождения корней многочлена  $f(x) = 2x^3 - 7x^2 + 7x - 2$ . Нетрудно проверить, что  $x = 1$  является корнем этого многочлена. Значит,  $f(x)$  делится на  $x - 1$ , т. е.  $f(x) = (x - 1)(2x^2 - 5x + 2)$  и данное уравнение принимает вид  $(x - 1)(2x^2 - 5x + 2) = 0$ . Чтобы найти остальные его корни, нужно решить квадратное уравнение  $2x^2 - 5x + 2 = 0$ . В результате получим следующие корни исходного уравнения:  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$ ,  $x_3 = 1/2$ .

Заметим, что если известен один из корней уравнения  $n$ -й степени, то с помощью теоремы Безу решение этого уравнения можно свести к той же задаче для уравнения  $(n - 1)$ -й степени.

2. Доказать, что число  $12^{435} - 1$  делится на 11.

Рассмотрим многочлен  $f(x) = x^{435} - 1$ . Так как  $f(1) = 0$ , то этот многочлен делится на  $x - 1$ , т. е.  $f(x) = (x - 1)s(x)$  для некоторого многочлена  $s(x)$  и, как мы установили ранее,  $s(x)$  — многочлен с целыми коэффициентами. В равенстве  $x^{435} - 1 = (x - 1)s(x)$  положим  $x = 12$ . Получим  $12^{435} - 1 = 11s(12)$ . Так как  $s(12)$  — целое число, то последнее равенство и означает, что  $12^{435} - 1$  делится на 11.

3. Доказать равенство

$$\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = 4.$$

Обозначим левую часть этого равенства через  $a$ , т. е.

$$a = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} a^3 &= 20 + 14\sqrt{2} + 3\left(\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}}\right)^2 \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} + \\ &+ 3\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} \left(\sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}\right)^2 + 20 - 14\sqrt{2} = \\ &= 40 + 3\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} \left(\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}\right) = \\ &= 40 + 3\sqrt[3]{20^2 - (14\sqrt{2})^2} a = 40 + 6a. \end{aligned}$$

Имеем  $a^3 = 40 + 6a$ , или  $a^3 - 6a - 40 = 0$ , т. е. число  $a$  является корнем многочлена  $f(x) = x^3 - 6x - 40$ . Легко проверить, что 4 — тоже корень  $f(x)$ , а значит,  $f(x) : (x - 4)$ . Выполнив деление, получим  $f(x) =$

$= (x - 4)(x^2 + 4x + 10)$ . Чтобы найти остальные корни многочлена  $f(x)$ , нужно решить уравнение  $x^2 + 4x + 10 = 0$ . Заметим, что это уравнение действительных корней не имеет. Следовательно, 4 — единственный действительный корень многочлена  $f(x)$ . Но  $a$  — тоже действительный корень этого многочлена, и, значит,  $a = 4$ .

## У п р а ж н е н и я

48. Докажите, что остаток при делении многочлена  $f(x)$  на  $ax + b$ , где  $a \neq 0$ , равен  $f(-b/a)$ .

49. При каких значениях  $a$  и  $b$  многочлен  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + ab$  при делении на  $x - 2$  дает остаток 15 и имеет корень  $x = 1$ ?

50. Многочлен  $f(x)$  при делении на  $x - 1$  дает остаток 3, а при делении на  $x + 1$  — остаток 5. Какой остаток получится при делении  $f(x)$  на  $x^2 - 1$ ?

51. Многочлен  $f(x)$  при делении на  $x - 2$  дает остаток 2, и число 3 является его корнем. Найдите остаток при делении  $f(x)$  на  $g(x) = x^2 - 5x + 6$ .

52. Решите уравнение  $x^3 - 3x + 2 = 0$ .

53. Докажите, что число  $a$  делится на число  $b$ , если:

а)  $a = 3^{60} + 1$ ,  $b = 82$ ;                      б)  $a = 2^{35} + 1$ ,  $b = 11$ .

54. Докажите равенство

$$\sqrt[3]{1 + \sqrt{26/27}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{26/27}} = 1.$$

55. Докажите, что из делимости произведения многочленов  $f(x) = g(x)h(x)$  на  $ax + b$ ,  $a \neq 0$ , следует  $g(x) : (ax + b)$  либо  $h(x) : (ax + b)$  (ср. с упражнением 26в).

## СХЕМА ГОРНЕРА \*

Итак, теорема Безу позволяет довольно просто находить остаток при делении многочлена  $f(x)$  на линейный двучлен  $x - c$ . Что касается неполного частного, то его

---

\* Горнер Уильям Джордж (1786—1837) — английский математик.

Пусть  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ,  $a_n \neq 0$ , — многочлен  $n$ -й степени. При делении его на  $x - c$  мы получим неполное частное  $s(x)$  и остаток  $r$ , т. е.  $f(x) = (x - c)s(x) + r$ . Так как ст.  $f(x) = n$ , а ст.  $(x - c) = 1$ , то ст.  $s(x) = n - 1$ , т. е.  $s(x) = b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \dots + b_1 x + b_0$ ,  $b_{n-1} \neq 0$ . Таким образом, имеем равенство

$$\begin{aligned} & a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = \\ & = (x - c) (b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \dots + b_1 x + b_0) + r. \end{aligned}$$

Многочлены, стоящие в левой и правой частях этого соотношения, равны, а значит, равны их соответствующие коэффициенты. Приравняем их, раскрыв предварительно скобки и приведя подобные члены в правой части данного равенства. Получим:

[illegible]

Напомним, что требуется найти неполное частное, т. е. его коэффициенты, и остаток. Выразим их из полученных равенств:

$$\begin{aligned} b_{n-1} &= a_n, \\ b_{n-2} &= cb_{n-1} + a_{n-1}, \end{aligned}$$

$$b_{n-3} = cb_{n-2} + a_{n-2},$$

• • • • •

$$b_1 = cb_2 + a_2,$$

$$b_0 = cb_1 + a_1,$$

$$r = cb_0 + a_0.$$

Мы нашли формулы, по которым можно вычислять коэффициенты неполного частного  $s(x)$  и остаток  $r$ . При этом вычисления оформляются в виде следующей таблицы; она называется схемой Горнера:

Коэффициенты $f(x)$					
	$a_n$	$a_{n-1}$	$a_{n-2}$	$\dots$	$a_0$
$c$	$b_{n-1}$	$b_{n-2} = cb_{n-1} + a_{n-1}$	$b_{n-3} = cb_{n-2} + a_{n-2}$	$\dots$	$r = cb_0 + a_0$
Коэффициенты $s(x)$					Остаток

В первую строку этой таблицы записывают подряд все коэффициенты многочлена  $f(x)$ , оставляя первую клетку свободной. Во второй строке в первой клетке записывают число  $c$ . Остальные клетки этой строки заполняют, вычисляя один за другим коэффициенты неполного частного  $s(x)$  и остаток  $r$ . Во второй клетке записывают коэффициент  $b_{n-1}$ , который, как мы установили, равен  $a_n$ . Коэффициенты, стоящие в каждой последующей клетке, вычисляются по такому правилу: число  $c$  умножается на число, стоящее в предыдущей клетке, и к результату прибавляется число, стоящее над заполняемой клеткой. Чтобы заполнить, скажем, пятую клетку, т. е. найти стоящий в ней коэффициент, нужно  $c$  умножить на число, находя-

щееся в четвертой клетке, и к результату прибавить число, стоящее над пятой клеткой.

Разделим, например, многочлен  $f(x) = 3x^4 - 5x^2 + 3x - 1$  на  $x - 2$  с остатком, используя схему Горнера. При заполнении первой строки этой схемы нельзя забывать о нулевых коэффициентах многочлена. Так, коэффициенты  $f(x)$  — это числа 3, 0, -5, 3, -1. И еще следует помнить, что степень неполного частного, как мы не раз отмечали, на единицу меньше степени многочлена  $f(x)$ .

Итак, выполняем деление по схеме Горнера:

	3	0	-5	3	-1
2	3	6	7	17	33

Получили неполное частное  $s(x) = 3x^3 + 6x^2 + 7x + 17$  и остаток  $r = 33$ , т. е.  $f(x) = (x - 2)(3x^3 + 6x^2 + 7x + 17) + 33$ . Заметим, что одновременно мы вычислили значение многочлена  $f(2) = 33$ .

Разделим теперь тот же многочлен  $f(x)$  на  $x + 2$  с остатком. В этом случае  $c = -2$ . Получим:

	3	0	-5	3	-1
-2	3	-6	7	-11	21

В результате имеем  $f(x) = (x + 2)(3x^3 - 6x^2 + 7x - 11) + 21$ .

## Упражнения

56. Разделите с остатком  $f(x)$  на  $x - c$ , используя схему Горнера, если:

- а)  $f(x) = x^6 - 4x^4 + x^3 - 2x^2 + 5$ ,  $c = -3$ ;  
 б)  $f(x) = x^6 - 3$ ,  $c = -2$ ;      в)  $f(x) = x^5 - x^2 + x$ ,  $c = 1$ ;  
 г)  $f(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 7x - 6$ ,  $c = 2$ .

## КОРНИ МНОГОЧЛЕНОВ

Ранее мы установили, что если  $c$  — корень многочлена  $f(x)$ , то  $f(x)$  делится на  $x - c$ . Сейчас обобщим это утверждение.

Пусть  $c_1, c_2, \dots, c_m$  — различные корни многочлена  $f(x)$ . Тогда  $f(x)$  делится на  $x - c_1$ , т. е.  $f(x) = (x - c_1) \times \times s_1(x)$ . Положим в этом равенстве  $x = c_2$ . Получим  $f(c_2) = (c_2 - c_1)s_1(c_2)$  и, так как  $f(c_2) = 0$ , то  $(c_2 - c_1) \times \times s_1(c_2) = 0$ . Но  $c_2 \neq c_1$ , т. е.  $c_2 - c_1 \neq 0$ , а значит,  $s_1(c_2) = 0$ . Таким образом,  $c_2$  — корень многочлена  $s_1(x)$ . Отсюда следует, что  $s_1(x)$  делится на  $x - c_2$ , т. е.  $s_1(x) = (x - c_2)s_2(x)$ . Подставим полученное выражение для  $s_1(x)$  в равенство  $f(x) = (x - c_1)s_1(x)$ . Имеем  $f(x) = (x - c_1)(x - c_2)s_2(x)$ . Положив в последнем равенстве  $x = c_3$  с учетом того, что  $f(c_3) = 0$ ,  $c_3 \neq c_1$ ,  $c_3 \neq c_2$ , получим, что  $c_3$  — корень многочлена  $s_2(x)$ . Значит,  $s_2(x) = (x - c_3)s_3(x)$ , а тогда  $f(x) = (x - c_1)(x - c_2)(x - c_3) \times \times s_3(x)$  и т. д. Продолжив эти рассуждения для оставшихся корней  $c_4, c_5, \dots, c_m$ , мы, наконец, получим  $f(x) = (x - c_1)(x - c_2) \dots (x - c_m)s_m(x)$ , т. е. доказано формулируемое ниже утверждение.

*Если  $c_1, c_2, \dots, c_m$  — различные корни многочлена  $f(x)$ , то  $f(x)$  можно представить в виде  $f(x) = (x - c_1) \times \times (x - c_2) \dots (x - c_m)s_m(x)$ .*

Отсюда вытекает важное следствие.

*Если  $c_1, c_2, \dots, c_m$  — различные корни многочлена  $f(x)$ , то  $f(x)$  делится на многочлен  $(x - c_1)(x - c_2) \dots (x - c_m)$ .*

Как мы уже отмечали, одной из важнейших задач в теории многочленов является задача отыскания корней



многочлена. В связи с этим существенным представляется вопрос о их числе. В самом деле, если дан какой-то многочлен и уже найдено, скажем, 10 его корней, то нужно знать, следует ли продолжать поиски. А вдруг этот многочлен больше не имеет корней? В таких случаях нам будет полезна приводимая ниже теорема.

*Число различных корней ненулевого многочлена  $f(x)$  не больше, чем его степень.*

Действительно, если  $f(x)$  корней не имеет (число их равно 0), то ясно, что теорема верна, ибо  $\text{ст. } f(x) \geq 0$ .

Пусть теперь  $f(x)$  имеет  $m$  корней  $c_1, c_2, \dots, c_m$ , причем все они различны. Тогда, по только что доказанному,  $f(x)$  делится на  $(x - c_1)(x - c_2) \dots (x - c_m)$ . В таком случае  $\text{ст. } f(x) \geq \text{ст. } ((x - c_1)(x - c_2) \dots (x - c_m)) = \text{ст. } (x - c_1) + \text{ст. } (x - c_2) + \dots + \text{ст. } (x - c_m) = m$ , т. е.  $\text{ст. } f(x) \geq m$ , а  $m$  — это число корней рассматриваемого многочлена.

А вот у нулевого многочлена бесконечно много корней, ведь его значение для любого  $x$  равно 0. В частности, по этой причине ему и не приписывают никакой определенной степени. Представьте себе, что число  $k \geq 0$  считают степенью нулевого многочлена. Тогда по сформулированной выше теореме у всех многочленов число корней не больше, чем их степень, а у нулевого больше (бесконечно много).

Из только что доказанной теоремы следует такое утверждение.

*Если многочлен  $f(x)$  не является многочленом степени, большей, чем  $n$ , и имеет более, чем  $n$  корней, то  $f(x)$  — нулевой многочлен.*

В самом деле, из условий этого утверждения следует, что либо  $f(x)$  — нулевой многочлен, либо  $\text{ст. } f(x) \leq n$ . Если предположить, что многочлен  $f(x)$  ненулевой, то  $\text{ст. } f(x) \leq n$ , и тогда  $f(x)$  имеет не более, чем  $n$  корней. Приходим к противоречию. Значит,  $f(x)$  — нулевой мно-

гочлен. Если вы помните, в начале книги мы поставили вопрос: равны ли многочлены  $f(x)$  и  $g(x)$ , если  $f(c) = g(c)$  для каждого числа  $c$ . Там отмечалось (без доказательства), что ответ на этот вопрос положителен. Теперь мы в состоянии привести доказательство даже более сильного утверждения.

*Пусть  $f(x)$  и  $g(x)$  — ненулевые многочлены степени, не большей, чем  $n$ . Если эти многочлены принимают одинаковые значения при  $n + 1$  значениях переменной  $x$ , то  $f(x) = g(x)$ .*

Для доказательства рассмотрим многочлен  $h(x) = f(x) - g(x)$ . Ясно, что либо  $h(x) = 0$ , либо ст.  $h(x) \leq n$ , т. е.  $h(x)$  не является многочленом степени, большей, чем  $n$ . Пусть теперь число  $c$  такое, что  $f(c) = g(c)$ . Тогда  $h(c) = f(c) - g(c) = 0$ , т. е.  $c$  — корень многочлена  $h(x)$ . Следовательно, многочлен  $h(x)$  имеет  $n + 1$  корень, а тогда, как только что доказано,  $h(x) = 0$ , т. е.  $f(x) = g(x)$ .

Если же  $f(x)$  и  $g(x)$  принимают одинаковые значения при всех значениях переменной  $x$ , то эти многочлены тем более равны.

Эта теорема весьма эффективно используется при доказательстве некоторых числовых тождеств. Докажем, например, что для любых попарно различных чисел  $a, b, c$  и любого числа  $x$

$$\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} = 1.$$

Конечно, можно, преобразовав левую часть указанного равенства, убедиться, что в результате получится 1. Но такой метод доказательства связан с громоздкими преобразованиями. Попытаемся обойтись без них.

Будем рассматривать  $x$  как переменную. Тогда, как нетрудно заметить, в левой части тождества находится многочлен, который мы обозначим  $f(x)$ . Переменная  $x$  входит в этот многочлен самое большее в степени 2, т. е.

ст.  $f(x) \leq 2$ . В правой части того же тождества — также многочлен:  $g(x) = 1$ .

Найдем теперь значения многочленов  $f(x)$  и  $g(x)$  при  $x = a, b, c$ . Ясно, что  $g(a) = g(b) = g(c) = 1$ . Далее,

$$\begin{aligned} f(a) &= \frac{(a-b)(a-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(a-a)(a-c)}{(b-a)(b-c)} + \\ &+ \frac{(a-a)(a-b)}{(c-a)(c-b)} = 1. \end{aligned}$$

Аналогично  $f(b) = f(c) = 1$ . Следовательно,  $f(a) = g(a)$ ,  $f(b) = g(b)$ ,  $f(c) = g(c)$ . Видим, что многочлены  $f(x)$  и  $g(x)$ , не являющиеся многочленами степени выше, чем 2, принимают одинаковые значения при трех различных значениях переменной. Значит,  $f(x) = g(x)$ .

## Упражнения

57. Решите уравнение  $x^4 - 8x^3 + 21x^2 - 22x + 8 = 0$ , если известны два его корня:  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$ .

58. Найдите все многочлены  $f(x)$ , удовлетворяющие условию  $xf(x-1) = (x-3)f(x)$ .

59. Многочлен  $f(x)$  обладает следующим свойством: для некоторой арифметической прогрессии значений  $x$  с разностью, отличной от нуля, соответствующие значения многочлена также образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что ст.  $f(x) \leq 1$ .

60. Пусть многочлен  $f(x)$  с целыми коэффициентами принимает значение, равное 5, при пяти различных целых значениях переменной  $x$ . Докажите, что  $f(x)$  не имеет целых корней.

61. Докажите, что для любых попарно различных чисел  $a, b, c$  и любого числа  $x$  справедливы следующие соотношения:

$$\text{а) } a \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + b \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + c \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} = x^1;$$

$$\text{б) } a^2 \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + b^2 \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + c^2 \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} = x^2.$$

Пусть даны  $n + 1$  различных чисел  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$  и еще  $n + 1$  число  $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ . Рассмотрим вопрос о существовании многочлена степени, не большей  $n$ , такого, что  $f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2, \dots, f(x_n) = y_n$ . Если искомым многочлен существует, то возникает вопрос, однозначно ли он определен?

На последний вопрос мы можем ответить сразу. Если  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  — многочлены, удовлетворяющие данным условиям, то они принимают одинаковые значения при  $n + 1$  значении переменной  $x$ . Следовательно,  $f_1(x) = f_2(x)$ . Таким образом, если нужный нам многочлен существует, то он только один.

Теперь выясним, существует ли такой многочлен. Для этого рассмотрим следующее выражение:

$$\begin{aligned} f(x) = & y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \cdots (x_0 - x_n)} + \\ & + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2) \cdots (x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \cdots (x_1 - x_n)} + \\ & + \dots + y_n \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1) \cdots (x_n - x_{n-1})}. \end{aligned} \quad (1)$$

Это выражение и называется *интерполяционной формулой Лагранжа*. Здесь в числитель дроби, коэффициент при которой равен  $y_k$ , входят все множители  $x - x_0, x - x_1, \dots, x - x_n$  за исключением  $x - x_k$ . Знаменатель получается из числителя заменой  $x$  на  $x_k$ .

Нетрудно заметить, что  $f(x)$  является многочленом от переменной  $x$  степени не выше, чем  $n$  (может получиться, что степень меньше, чем  $n$ , так как после раскрытия скобок, члены, содержащие  $x^n$ , могут взаимно уничтожиться). Покажем, что это именно тот многочлен, ко-

---

\* *Лагранж Жозеф Луи* (1736—1813) — французский математик.

торый нам нужен. Для этого вычислим  $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ .

При  $x = x_0$  первая дробь в выражении (1) равна 1, а все остальные дроби — 0, так как в числителе каждой из них есть множитель  $x - x_0$ . Таким образом,  $f(x_0) = y_0$ . Аналогично получаем, что  $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2, \dots, f(x_n) = y_n$ .

Итак, искомый многочлен существует, единствен и строится по интерполяционной формуле Лагранжа.

Найдем, например, многочлен  $f(x)$  степени не выше, чем 3, такой, что  $f(2) = 3, f(3) = -5, f(4) = 1, f(5) = 33$ . В нашем случае  $x_0 = 2, x_1 = 3, x_2 = 4, x_3 = 5$  и  $y_0 = 3, y_1 = -5, y_2 = 1, y_3 = 33$ . Используя интерполяционную формулу Лагранжа, получаем

$$f(x) = 3 \frac{(x-3)(x-4)(x-5)}{(2-3)(2-4)(2-5)} - 5 \frac{(x-2)(x-4)(x-5)}{(3-2)(3-4)(3-5)} + \\ + \frac{(x-2)(x-3)(x-5)}{(4-2)(4-3)(4-5)} + 33 \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(5-2)(5-3)(5-4)}.$$

Раскрыв скобки и приведя подобные члены, находим  $f(x) = 2x^3 - 11x^2 + 9x + 13$ .

Изложенное выше имеет несколько неожиданное приложение. В математике часто нужно не столько решить систему линейных уравнений, сколько выяснить, имеет ли она решение и если имеет, то единственно ли оно.

Рассмотрим, например, систему

$$\left. \begin{aligned} 8x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 &= 3, \\ 27x_1 + 9x_2 + 3x_3 + x_4 &= -5, \\ 64x_1 + 16x_2 + 4x_3 + x_4 &= 1, \\ 125x_1 + 25x_2 + 5x_3 + x_4 &= 33. \end{aligned} \right\}$$

Обратите внимание, коэффициенты при неизвестных во всех уравнениях системы есть убывающие степени, начиная с третьей, чисел 2, 3, 4, 5 соответственно. Дальней-

шие рассуждения пригодны только для систем такого типа, т. е. для систем, каждое уравнение которых имеет вид:  $a^n x_1 + a^{n-1} x_2 + \dots + a x_n + x_{n+1} = 0$ ,  $a \neq 0$ . Рассмотрим поставленные выше вопросы для данной системы. Конечно, ответить на них можно, решив систему. Но в данном случае задача решается гораздо проще.

Пусть  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  — многочлен с неизвестными пока коэффициентами. Потребуем, чтобы  $f(2) = 3$ ,  $f(3) = -5$ ,  $f(4) = 1$ ,  $f(5) = 33$ . Вычислив значения данного многочлена при  $x = 2, 3, 4, 5$ , получим систему

$$\left. \begin{aligned} 8a + 4b + 2c + d &= 3, \\ 27a + 9b + 3c + d &= -5, \\ 64a + 16b + 4c + d &= 1, \\ 125a + 25b + 5c + d &= 33. \end{aligned} \right\}$$

Следовательно, решением исходной системы уравнений является  $x_1 = a$ ,  $x_2 = b$ ,  $x_3 = c$ ,  $x_4 = d$ , где  $a, b, c, d$  — коэффициенты многочлена  $f(x)$  степени не выше третьей, который при  $x = 2, 3, 4, 5$  принимает соответственно значения 3,  $-5$ , 1, 33. Такой многочлен, как мы уже знаем, существует, причем он единствен. Значит, рассматриваемая система уравнений имеет решение, и оно только одно. Можно найти это решение, отыскав многочлен  $f(x)$ . Но он уже найден чуть раньше — это многочлен  $f(x) = 2x^3 - 11x^2 + 9x + 13$ . Следовательно,  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = -11$ ,  $x_3 = 9$ ,  $x_4 = 13$  — решение системы.

Как видим, задача о существовании и числе решений системы уравнений указанного типа с помощью многочленов решается гораздо проще. А вот как проще найти решение — с помощью интерполяционной формулы Лагранжа или непосредственно решая систему — это вопрос спорный.

## Упражнения

62. Найдите многочлен  $f(x)$  не выше четвертой степени, если:

а)  $f(1) = -1$ ,  $f(2) = 3$ ,  $f(3) = 37$ ,  $f(-1) = 9$ ,  $f(-2) = 47$ ;

б)  $f(1) = 0$ ,  $f(2) = 0$ ,  $f(-2) = 60$ ,  $f(0) = -6$ ,  $f(3) = 0$ .

63. Используя многочлены, выясните, совместны ли данные системы уравнений, укажите количество решений и найдите их:

$$\left. \begin{aligned} \text{а) } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 6, \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 8, \\ -8x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 &= -3, \\ 27x_1 + 9x_2 + 3x_3 + x_4 &= 92; \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{б) } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 9, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 &= 44, \\ 8x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 &= 25, \\ 27x_1 + 9x_2 + 3x_3 + x_4 &= 63. \end{aligned} \right\}$$

### КРАТНЫЕ КОРНИ МНОГОЧЛЕНА

Если число  $c$  является корнем многочлена  $f(x)$ , то этот многочлен, как известно, делится на  $x - c$ . Может случиться, что  $f(x)$  делится и на какую-то степень многочлена  $x - c$ , т. е. на  $(x - c)^k$ ,  $k > 1$ . В этом случае  $c$  называют *кратным корнем*. Сформулируем определение более четко.

*Число  $c$  называется корнем кратности  $k$  ( $k$ -кратным корнем) многочлена  $f(x)$ , если этот многочлен делится на  $(x - c)^k$ ,  $k \geq 1$  ( $k$  — натуральное число), но не делится на  $(x - c)^{k+1}$ . Если  $k = 1$ , то  $c$  называют простым корнем, а если  $k > 1$ , — кратным корнем многочлена  $f(x)$ .*

В дальнейшем при определении кратности корней нам будет полезно следующее предложение.

*Если многочлен  $f(x)$  представим в виде  $f(x) = (x - c)^m g(x)$ ,  $m$  — натуральное число, то он делится на  $(x - c)^{m+1}$  тогда и только тогда, когда  $g(x)$  делится на  $x - c$ .*

В самом деле, если  $g(x)$  делится на  $x - c$ , т. е.  $g(x) = (x - c)s(x)$ , то  $f(x) = (x - c)^{m+1}s(x)$ , а значит,  $f(x)$  делится на  $(x - c)^{m+1}$ .

Обратно, если  $f(x)$  делится на  $(x - c)^{m+1}$ , то  $f(x) = (x - c)^{m+1}s(x)$ . Тогда  $(x - c)^m g(x) = (x - c)^{m+1}s(x)$  и после сокращения на  $(x - c)^m$  получим  $g(x) = (x - c)s(x)$ . Отсюда и следует, что  $g(x)$  делится на  $x - c$ .

А сейчас вернемся к понятию кратности корня. Выясним, например, является ли число 2 корнем многочлена  $f(x) = x^5 - 5x^4 + 3x^3 + 22x^2 - 44x + 24$ , и если да, найдем его кратность. Чтобы ответить на первый вопрос, проверим с помощью схемы Горнера, делится ли  $f(x)$  на  $x - 2$ . Имеем:

	1	-5	3	22	-44	24
2	1	-3	-3	16	-12	0

Как видим, остаток при делении  $f(x)$  на  $x - 2$  равен 0, т. е.  $f(x)$  делится на  $x - 2$ . Значит, 2 — корень этого многочлена. Кроме того, мы получили, что  $f(x) = (x - 2)(x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 16x - 12)$ . Теперь выясним, делится ли  $f(x)$  на  $(x - 2)^2$ . Это зависит, как мы только что доказали, от делимости многочлена  $g(x) = x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 16x - 12$  на  $x - 2$ . Снова воспользуемся схемой Горнера:

	1	-3	-3	16	-12
2	1	-1	-5	6	0



Получили, что  $g(x)$  делится на  $x - 2$  и  $g(x) = (x - 2)(x^3 - x^2 - 5x + 6)$ . Тогда  $f(x) = (x - 2)^2 \times (x^3 - x^2 - 5x + 6)$ .

Итак,  $f(x)$  делится на  $(x - 2)^2$ . Теперь нужно выяснить, делится ли  $f(x)$  на  $(x - 2)^3$ . Для этого проверим, делится ли  $h(x) = x^3 - x^2 - 5x + 6$  на  $x - 2$ :

	1	-1	-5	6
2	1	1	-3	0

Получим, что  $h(x)$  делится на  $x - 2$ , а значит,  $f(x)$  делится на  $(x - 2)^3$ , и  $f(x) = (x - 2)^3(x^2 + x - 3)$ .

Далее аналогично проверяем, делится ли  $f(x)$  на  $(x - 2)^4$ , т. е. делится ли  $s(x) = x^2 + x - 3$  на  $x - 2$ :

	1	1	-3
2	1	3	3

Находим, что остаток при делении  $s(x)$  на  $x - 2$  равен 3, т. е.  $s(x)$  не делится на  $x - 2$ . Значит,  $f(x)$  не делится на  $(x - 2)^4$ .

Таким образом,  $f(x)$  делится на  $(x - 2)^3$ , но не делится на  $(x - 2)^4$ . Следовательно, число 2 является корнем кратности 3 многочлена  $f(x)$ .

Обычно проверку корня на кратность выполняют

в одной таблице. Для данного примера эта таблица имеет следующий вид:

	1	—5	3	22	—44	24
2	1	—3	—3	16	—12	0
2	1	—1	—5	6	0	
2	1	1	—3	0		
2	1	3	3			

Другими словами, выполнив по схеме Горнера деление многочлена  $f(x)$  на  $x - 2$ , во второй строке мы получим коэффициенты многочлена  $g(x)$ . Затем эту вторую строку считаем первой строкой новой схемы Горнера и выполняем деление  $g(x)$  на  $x - 2$  и т. д. Продолжаем вычисления до тех пор, пока не получим остаток, отличный от нуля. В этом случае кратность корня равна числу полученных нулевых остатков. В строке, содержащей последний нулевой остаток, находятся и коэффициенты частного при делении  $f(x)$  на  $(x - 2)^3$ .

Теперь, используя только что предложенную схему проверки корня на кратность, решим следующую задачу. При каких  $a$  и  $b$  многочлен  $f(x) = x^4 + 2x^3 + ax^2 + (a + b)x + 2$  имеет число  $-2$  корнем кратности 2?

Так как кратность корня  $-2$  должна быть равна 2, то, выполняя деление на  $x + 2$  по предложенной схеме,

мы должны два раза получить остаток 0, а в третий раз — остаток, отличный от нуля. Имеем:

	1	2	$a$	$a + b$	2
-2	1	0	$a$	$-a + b$	$2a - 2b + 2$
-2	1	-2	$a + 4$	$-3a + b - 8$	
-2	1	-4	$a + 12$		

Таким образом, число  $-2$  является корнем кратности 2 исходного многочлена тогда и только тогда, когда

$$\left. \begin{aligned} 2a - 2b + 2 &= 0, \\ -3a + b - 8 &= 0, \\ a + 12 &\neq 0. \end{aligned} \right\}$$

Отсюда получаем:  $a = -7/2$ ,  $b = -5/2$ .

## Упражнения

64. Укажите многочлен  $f(x)$  наименьшей степени, для которого числа  $-2$ ,  $0$ ,  $1$ ,  $3$  являются корнями кратности  $2$ ,  $2$ ,  $3$ ,  $1$  соответственно.

65. Найдите кратность  $k$  корня  $c$  многочлена  $f(x)$  и представьте  $f(x)$  в виде  $f(x) = (x - c)^k s(x)$ , если:

а)  $f(x) = 2x^4 - 7x^3 + 9x^2 - 5x + 1$ ,  $c = 1$ ;

б)  $f(x) = x^5 - 5x^4 + 40x^2 - 80x + 48$ ,  $c = 2$ ;

в)  $f(x) = x^5 + 6x^4 + 11x^3 + 2x^2 - 12x - 8$ ,  $c = -2$ .

66. При каких значениях  $a$  и  $b$  многочлен  $f(x) = x^5 + ax^3 + bx + 16$  имеет  $x = -2$  корнем кратности 2?

67. При каких значениях  $a$ ,  $b$ ,  $c$  многочлен  $f(x) = x^5 + ax^3 + bx + c$  имеет  $x = -1$  корнем кратности 3?

68. При каком значении  $a$  многочлен  $f(x) = x^3 + ax^2 + ax + 1$  имеет  $x = -1$  корнем кратности 2?

69. При каких значениях  $a$ ,  $b$ ,  $c$  многочлен  $f(x)$  делится на  $(x - 1)^3$ , если:

а)  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ ;

б)  $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + c$ ;

в)  $f(x) = ax^4 + bx^2 + cx + 1$ ?

70. При каких значениях  $a$  и  $b$  многочлен  $f(x) = x^n + ax + b$  делится на  $(x - 1)^2$ ?

71. Число  $c$  является корнем кратности  $k$  многочлена  $f(x)$  и корнем кратности  $m$  многочлена  $g(x)$ . Найдите кратность корня  $c$  для следующих многочленов:

а)  $h(x) = f(x)g(x)$ ;

б)  $s(x) = f(x) + g(x)$ , если  $k < m$ .

72. Число  $-1/2$  является корнем многочлена  $f(x)$ . Докажите, что это число является корнем многочлена  $g(x) = 4x^2 + 4x + 1 + f(x)$  кратности не выше второй.

## ПРОИЗВОДНАЯ МНОГОЧЛЕНА

Познакомимся еще с одним понятием теории многочленов, которое во многих случаях будет нам полезно.

*Производной (или производным многочленом) многочлена  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$  называется многочлен  $f'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + 2 a_2 x + a_1$ .*

Например, если  $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + x^2 + 5x - 8$ , то  $f'(x) = 8x^3 - 9x^2 + 2x + 5$ . Если  $f(x) = c$ , где  $c$  — число, то  $f'(x) = 0$ .

Для тех, кто знаком с понятием производной функции, отметим следующее. Многочлен  $f(x)$  можно рассматривать как действительную функцию  $y = f(x)$ , определенную на множестве действительных чисел, которая каждому числу  $x_0$  ставит в соответствие число  $y_0 = f(x_0)$ . В этом случае введенная нами производная многочлена

$f(x)$  совпадает с производной функции  $y = f(x)$ , полученной по правилам дифференцирования.

Из определения видно, что производная  $f'(x)$  многочлена  $f(x)$  также будет многочленом. Следовательно, можно рассматривать и производную этого многочлена, т. е. многочлена  $f'(x)$ . Она называется *второй производной* (или *производной второго порядка*) *многочлена  $f(x)$*  и обозначается  $f''(x)$ . Но  $f''(x)$  — это тоже многочлен, и, значит, можно вести речь о его производной. Производная многочлена  $f''(x)$  называется *третьей производной* (или *производной третьего порядка*) *многочлена  $f(x)$*  и обозначается  $f'''(x)$ . Аналогично определяются производные четвертого, пятого и т. д. порядков. Эти производные обозначаются соответственно  $f^{IV}(x)$ ,  $f^V(x)$ , ..., т. е. порядок производной, начиная с четвертого, указывается римскими цифрами. Производная произвольного  $k$ -го порядка многочлена  $f(x)$  обозначается  $f^{(k)}(x)$ . Здесь порядок  $k$  производной берется в скобки, чтобы не перепутать его с показателем степени.

Если, например,  $f(x) = 2x^5 + 7x^3 - 5x^2 - 8x + 5$ , то  $f'(x) = 10x^4 + 21x^2 - 10x - 8$ ,  $f''(x) = 40x^3 + 42x - 10$ ,  $f'''(x) = 120x^2 + 42$ ,  $f^{IV}(x) = 240x$ ,  $f^V(x) = 240$ ,  $f^{VI}(x) = 0$ .

Очевидно, что в нашем случае  $f^{(k)}(x) = 0$ , где  $k \geq 6$ .

Непосредственно из определения производной следует, что если  $f(x)$  — многочлен  $n$ -й степени, то его производная  $f'(x)$  — многочлен степени  $n - 1$ .

Далее, если  $f(x)$ ,  $g(x)$  — многочлены, то  $f(x) \pm g(x)$  — тоже многочлен, и можно говорить о его производной. Эта производная обозначается  $(f(x) \pm g(x))'$ . Оказывается,

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x).$$

Читателю предлагается доказать это самостоятельно.

Аналогично можно рассматривать производную произведения  $f(x)g(x)$ , которая обозначается  $(f(x)g(x))'$ .

В этом случае

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Доказательство приведенной формулы не столь трудно, сколь громоздко, и мы его опускаем.

Если  $c$  — некоторое число, то

$$(cg(x))' = cg'(x).$$

Это равенство легко получить из предыдущего, положив  $f(x) = c$  и имея в виду, что в этом случае  $f'(x) = 0$ .

Далее, если  $n$  — натуральное число, то

$$(f^n(x))' = nf^{n-1}(x)f'(x).$$

Данное равенство можно доказать методом математической индукции, но мы этим заниматься не будем.

Те, кто знаком с понятием производной функции, конечно, заметили, что перечисленные выше свойства производной многочлена — это правила дифференцирования функций. Указанные свойства облегчают вычисления производной многочлена.

Пусть, например, нужно найти производную многочлена  $f^3(x)$ , где  $f(x) = x^3 - x^2 + 2x + 3$ . Для решения задачи применим формулу производной степени многочлена:  $(f^3(x))' = 3f^2(x)f'(x) = 3(x^3 - x^2 + 2x + 3)^2(3x^2 - 2x + 2)$ .

Рассмотрим теперь, как связаны кратные корни многочлена  $f(x)$  с корнями его производной.

*Если  $c$  — корень кратности  $k \geq 2$  многочлена  $f(x)$ , то  $c$  — корень кратности  $k - 1$  его производной  $f'(x)$ . В частности, если  $c$  — простой корень многочлена  $f(x)$ , то  $c$  не является корнем его производной  $f'(x)$ .*

Докажем первую часть этого утверждения. Так как  $c$  — корень кратности  $k$ ,  $k \geq 2$ , то  $f(x)$  делится на  $(x - c)^k$  и не делится на  $(x - c)^{k+1}$ . Значит,  $f(x) = (x - c)^k s(x)$  и  $s(x)$  не делится на  $x - c$ . Используя

формулы производной произведения двух многочленов и производной степени многочлена, получаем:

$$\begin{aligned} f'(x) &= ((x-c)^k s(x))' = ((x-c)^k)' s(x) + (x-c)^k s'(x) = \\ &= k(x-c)^{k-1} s(x) + (x-c)^k s'(x) = \\ &= (x-c)^{k-1} (ks(x) + (x-c)s'(x)). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что  $f'(x)$  делится на  $(x-c)^{k-1}$ . Покажем теперь, что  $f'(x)$  не делится на  $(x-c)^k$ . Для этого достаточно доказать, что многочлен  $g(x) = ks(x) + (x-c)s'(x)$  не делится на  $x-c$ . Предположим противное:  $g(x)$  делится на  $x-c$ . Тогда  $c$  — корень многочлена  $g(x)$ , т. е.  $g(c) = ks(c) + (c-c)s'(c) = 0$ . Отсюда следует, что  $s(c) = 0$ , а значит,  $s(x)$  делится на  $x-c$ . Пришли к противоречию. Следовательно, предположение о делимости  $g(x)$  на  $x-c$  неверно.

Таким образом,  $f'(x)$  делится на  $(x-c)^{k-1}$  и не делится на  $(x-c)^k$ , а это и означает, что  $c$  — корень кратности  $k-1$  многочлена  $f'(x)$ .

Вторая часть данного утверждения доказывается точно так же.

Итак, если  $c$  — корень кратности  $k \geq 2$  многочлена  $f(x)$ , то  $c$  — корень кратности  $k-1$  его производной  $f'(x)$ . Так как  $f''(x)$  — это производная многочлена  $f'(x)$ , то  $c$  — корень кратности  $k-2$  производной  $f''(x)$ . Проводя аналогичные рассуждения, получаем, что  $c$  — корень кратности  $k-3$  производной  $f'''(x)$  и т. д. Для каждой следующей производной кратность корня  $c$  на единицу меньше, поэтому  $c$  — простой корень производной  $f^{(k-1)}(x)$ . Значит,  $c$  не является корнем производной  $f^{(k)}(x)$ .

Легко заметить, что верно и обратное, т. е. если  $c$  является корнем многочленов  $f(x)$ ,  $f'(x)$ ,  $f''(x)$ , ...,  $f^{(k-1)}(x)$  и не является корнем многочлена  $f^{(k)}(x)$ , то  $c$  — корень кратности  $k$  многочлена  $f(x)$ . В самом деле, если предположить, что  $m$  — кратность корня  $c$  для  $f(x)$  и  $m < k$ , то, по доказанному выше,  $f^{(m)}(c) \neq 0$ , что невоз-

можно. Если же предположить, что  $m > k$ , то тогда  $f^{(k)}(c) = 0$ , а это тоже невозможно.

Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

*Число  $c$  является корнем кратности  $k \geq 2$  многочлена  $f(x)$  тогда и только тогда, когда  $f(c) = f'(c) = f''(c) = \dots = f^{(k-1)}(c) = 0$  и  $f^{(k)}(c) \neq 0$ .*

Теорема, которую мы сейчас сформулируем и докажем, определяет необходимое и достаточное условие существования кратных корней.

*Многочлен  $f(x)$  имеет кратный корень тогда и только тогда, когда он и его производная  $f'(x)$  имеют общий корень.*

В самом деле, если  $f(x)$  имеет кратный корень  $c$ , то  $c$  является и корнем производной  $f'(x)$ , т. е.  $c$  — общий корень  $f(x)$  и  $f'(x)$ .

Обратно, если  $c$  — общий корень  $f(x)$  и  $f'(x)$ , т. е.  $f(c) = f'(c) = 0$ , то по только что доказанному утверждению  $c$  — кратный корень многочлена  $f(x)$ .

Рассмотрим пример применения доказанной теоремы. Пусть  $f(x) = 2x^3 - x^2 - 4x + 3$ . Найдем его кратные корни. В нашем случае  $f'(x) = 6x^2 - 2x - 4$  и задача сводится к нахождению общих корней многочленов  $f(x)$  и  $f'(x)$ . Корни многочлена  $f'(x)$  легко найти — это числа  $-2/3$  и  $1$ . Осталось проверить, является ли какое-нибудь из них также корнем многочлена  $f(x)$ . В результате проверки получаем, что число  $1$  является и корнем многочлена  $f(x)$ .

Таким образом,  $f(x)$  имеет кратный корень и этот корень равен  $1$ .

## У п р а ж н е н и я

73. Найдите все производные многочлена  $f(x)$  до шестого порядка включительно, если:

а)  $f(x) = 2x^5 - x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 7$ ;



$$6) f(x) = (x-1)^2(2x-3); \quad \text{в) } f(x) = (2x+1)^5.$$

74. Дан многочлен  $f(x) = 2x^4 - 5x^2 + x - 3$ . Найдите  $f'(2)$ ,  $f''(-1)$ ,  $f'''(3)$ ,  $f^{IV}(1)$ ,  $f^V(3)$ .

75. Какова степень многочлена  $f(x)$ , если  $f^{IV}(x) \neq 0$ , а  $f^V(x) = 0$ ?

76. Известно, что  $f'(x) = g'(x)$ . Следует ли отсюда, что  $f(x) = g(x)$ ?

77. Найдите многочлен  $f(x)$ , если  $f'(x) = 5x^4 + 18x^2 - 4x + 3$  и  $f(1) = 8$ .

78. Многочлен  $f(x)$  при делении на  $(x^3 + x + 1)^2$  дает остаток  $x^2 + x + 5$ . Какой остаток получится при делении многочлена  $f'(x)$  на  $x^3 + x + 1$ ?

79. Найдите многочлен  $f(x)$ , если:

$$\text{а) } f(x) = f'(x) + x; \quad \text{б) } f(x) = 2f'(x);$$

$$\text{в) } f(x) = (f'(x))^m \text{ для некоторого натурального } m.$$

80. Имеет ли многочлен  $f(x)$  кратные корни, если:

$$\text{а) } f(x) = 3x^3 - 13x^2 + 16x - 4; \quad \text{б) } f(x) = x^n - 1;$$

$$\text{в) } f(x) = \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + \frac{x^2}{2!} + \frac{x}{1!} + 1?$$

81. Многочлен  $f(x) = x^3 + 45x^2 + 8x + a$  имеет кратный корень. Найдите возможные значения параметра  $a$ , соответствующие им кратные корни и их кратность.

82. При каких значениях  $a$  многочлен  $f(x)$  имеет кратный корень, какова кратность  $k$  этого корня, если:

$$\text{а) } f(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + a; \quad \text{б) } f(x) = x^3 + 3x^2 + 3ax - 4;$$

$$\text{в) } f(x) = x^3 + ax^2 + 3x - 1; \quad \text{г) } f(x) = 2x^3 - x^2 + ax + 3;$$

$$\text{д) } f(x) = 3x^4 - 6x^3 + ax^2 - 2x + 1?$$

83. При каких значениях  $a$  и  $b$  многочлен  $f(x) = x^{17} + ax^8 + bx^3 + 1$  делится на  $(x+1)^2$ ?

84. При каких натуральных  $n$  многочлен  $f(x)$  делится на  $(x-1)^2$ , если:

$$\text{а) } f(x) = x^n - nx + n - 1;$$

$$\text{б) } f(x) = x^{2n} - x^{n+1} - 5x + 5;$$

$$\text{в) } f(x) = nx^{2n} - (2n-1)x^n - 9x + 17?$$

85. Пусть  $c$  — кратный корень многочлена  $f(x)$ . Докажите, что  $c$  — кратный корень многочлена  $f(x) + (f'(x))^2$ .

Вы уже убедились, что понятие производной многочлена дает возможность решить ряд интересных задач. Оказывается, с помощью этого понятия можно получить одно весьма полезное условие равенства двух многочленов.

Если  $f(x)$  и  $g(x)$  — многочлены степени не выше, чем  $n$ , и  $f(c) = g(c)$ ,  $f'(c) = g'(c)$ ,  $f''(c) = g''(c)$ , ...,  $f^{(n)}(c) = g^{(n)}(c)$  для некоторого числа  $c$ , то  $f(x) = g(x)$ .

Для доказательства этого утверждения рассмотрим многочлен  $h(x) = f(x) - g(x)$ . Ясно, что либо  $h(x) = 0$ , либо ст.  $h(x) \leq n$ . Покажем, что второй случай невозможен. В самом деле, из  $f(c) = g(c)$  следует, что  $h(c) = 0$ . Далее, из  $f'(c) = g'(c)$  и  $h'(x) = f'(x) - g'(x)$  имеем  $h'(c) = 0$ . Аналогично получаем, что  $h''(c) = 0$ ,  $h'''(c) = 0$ , ...,  $h^{(n)}(c) = 0$ . Тогда, как мы установили ранее,  $c$  — корень многочлена  $h(x)$  кратности, по меньшей мере,  $n + 1$ . Значит,  $h(x)$  делится на  $(x - c)^{n+1}$ , что невозможно, ибо ст.  $h(x) \leq n$ . Итак,  $h(x) = 0$ , т. е.  $f(x) = g(x)$ , что и требовалось доказать.

С помощью только что доказанной теоремы и понятия производной мы получим одно любопытное представление многочлена. Прежде, чем указать это представление, сделаем одно замечание. Если многочлен задан в виде

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

то говорят, что он записан по убывающим степеням переменной  $x$ . В настоящей книге применялась только такая запись, но в некоторых случаях многочлен удобнее записывать по возрастающим степеням переменной  $x$ , т. е. в виде

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n.$$

---

\* Тейлор Брук (1685—1731) — английский математик.

Здесь мы будем использовать именно такую запись многочлена.

А теперь сформулируем утверждение, которое и дает искомое представление многочлена.

*Всякий многочлен  $f(x)$  степени  $n$  можно представить в виде*

$$f(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!} (x-c) + \frac{f''(c)}{2!} (x-c)^2 + \\ + \frac{f'''(c)}{3!} (x-c)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-c)^n, \quad (1)$$

где  $c$  — произвольное число.

Представление (1) называется *формулой Тейлора для многочленов* или *разложением многочлена по степеням  $x - c$* .

Докажем, что формула (1) верна. Обозначим

$$g(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!} (x-c) + \frac{f''(c)}{2!} (x-c)^2 + \\ + \frac{f'''(c)}{3!} (x-c)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-c)^n.$$

Необходимо доказать, что  $f(x) = g(x)$ . Для этого, как мы уже знаем, достаточно доказать, что  $f(c) = g(c)$ ,  $f'(c) = g'(c)$ ,  $f''(c) = g''(c)$ ,  $\dots$ ,  $f^{(n)}(c) = g^{(n)}(c)$ .

Легко получаем, что  $g(c) = f(c)$ . Далее,

$$g'(x) = \frac{f'(c)}{1!} + \frac{2f''(c)}{2!} (x-c) + \frac{3f'''(c)}{3!} (x-c)^2 + \\ + \dots + \frac{nf^{(n)}(c)}{n!} (x-c)^{n-1},$$

$$g''(x) = \frac{2f''(c)}{2!} + \frac{3 \cdot 2 \cdot f'''(c)}{3!} (x-c) + \\ + \dots + \frac{n(n-1)f^{(n)}(c)}{n!} (x-c)^{n-2},$$

$$g^{(n)}(x) = \frac{n(n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot f^{(n)}(c)}{n!}.$$

Отсюда получаем:

$$g'(c) = \frac{f'(c)}{1!} = f'(c),$$

$$g''(c) = \frac{2f''(c)}{2!} = f''(c),$$

$$g^{(n)}(c) = \frac{n(n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot f^{(n)}(c)}{n!} = f^{(n)}(c).$$

Итак, сформулированное выше утверждение доказано.

Разложим, например, многочлен  $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5$  по степеням  $x + 1$ . Так как  $x + 1 = x - (-1)$ , то в нашем случае  $c = -1$ . Тогда по формуле Тейлора находим

$$\begin{aligned} f(x) = f(-1) + \frac{f'(-1)}{1!}(x+1) + \frac{f''(-1)}{2!}(x+1)^2 + \\ + \frac{f'''(-1)}{3!}(x+1)^3. \end{aligned}$$

Осталось вычислить значения данного многочлена  $f(x)$  и его производных  $f'(x)$ ,  $f''(x)$ ,  $f'''(x)$  при  $x = -1$ . Имеем:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 2x^2 + 5, & f(-1) &= 2, \\ f'(x) &= 3x^2 - 4x, & f'(-1) &= 7, \\ f''(x) &= 6x - 4, & f''(-1) &= -10, \\ f'''(x) &= 6; & f'''(-1) &= 6. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} f(x) &= 2 + \frac{7}{1!}(x+1) + \frac{-10}{2!}(x+1)^2 + \frac{6}{3!}(x+1)^3 \\ \text{или } f(x) &= 2 + 7(x+1) - 5(x+1)^2 + (x+1)^3. \end{aligned}$$



Подставляя эти значения в записанную выше формулу Тейлора для многочлена  $f(x) = (a + x)^n$ , получаем

$$(a + x)^n = a^n + \frac{n}{1!} a^{n-1} x + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2} x^2 + \\ + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} a^{n-3} x^3 + \dots + \frac{n!}{n!} x^n.$$

Эта формула называется *формулой бинома Ньютона*.

Вычислим по формуле бинома Ньютона, например,  $(\sqrt{2} - \sqrt{3})^5$ . В нашем случае  $a = \sqrt{2}$ ,  $x = -\sqrt{3}$ ,  $n = 5$ .

Тогда

$$(\sqrt{2} - \sqrt{3})^5 = (\sqrt{2})^5 + \frac{5}{1!} (\sqrt{2})^4 (-\sqrt{3}) + \\ + \frac{5 \cdot 4}{2!} (\sqrt{2})^3 (-\sqrt{3})^2 + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} (\sqrt{2})^2 (-\sqrt{3})^3 + \\ + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{4!} \sqrt{2} (-\sqrt{3})^4 + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{5!} (-\sqrt{3})^5 = \\ = 109\sqrt{2} - 89\sqrt{3}.$$

Вернемся к формуле Тейлора. Чтобы разложить многочлен по степеням  $x - c$ , нужно выполнить достаточно большой объем вычислений: найти  $f'(x)$ ,  $f''(x)$ , ...,  $f^{(n)}(x)$ , затем  $f(c)$ ,  $f'(c)$ ,  $f''(c)$ , ...,  $f^{(n)}(c)$ , подставить полученные значения в формулу и выполнить вычисления для каждого коэффициента  $f^{(k)}(c)/k!$  разложения. Укажем более простой метод отыскания этих коэффициентов.

Из формулы Тейлора для многочлена  $f(x)$  имеем

$$f(x) = (x - c) \left( \frac{f'(c)}{1!} + \frac{f''(c)}{2!} (x - c) + \right. \\ \left. + \frac{f'''(c)}{3!} (x - c)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x - c)^{n-1} \right) + f(c).$$

Получили уже известный результат:  $f(c)$  — остаток при делении  $f(x)$  на  $x - c$ , и его можно найти по схеме Горнера. Неполным частным при этом делении (будем называть его *первым неполным частным*) является многочлен

$$s_1(x) = \frac{f'(c)}{1!} + \frac{f''(c)}{2!}(x-c) + \frac{f'''(c)}{3!}(x-c)^2 + \\ + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^{n-1}.$$

Представим его в виде

$$s_1(x) = (x-c) \left( \frac{f''(c)}{2!} + \frac{f'''(c)}{3!}(x-c) + \right. \\ \left. + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^{n-2} \right) + \frac{f'(c)}{1!}.$$

Видим, что  $\frac{f'(c)}{1!}$  (т. е. второй коэффициент разложения  $f(x)$  по степеням  $x - c$ ) есть остаток при делении первого неполного частного на  $x - c$ , а значит, его можно найти, применив схему Горнера к  $s_1(x)$ . Неполное частное при этом делении (*второе неполное частное*) обозначим  $s_2(x)$  и запишем в виде

$$s_2(x) = (x-c) \left( \frac{f'''(c)}{3!} + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^{n-3} \right) + \\ + \frac{f''(c)}{2!}.$$

Отсюда следует, что  $\frac{f''(c)}{2!}$  (т. е. третий коэффициент разложения  $f(x)$  по степеням  $x - c$ ) есть остаток при делении второго неполного частного на  $x - c$ . Аналогично рассуждая, получаем, что  $\frac{f'''(c)}{3!}$  — это остаток при делении *третьего неполного частного* на  $x - c$  и т. д.

Таким образом, чтобы найти коэффициенты разложения многочлена  $f(x)$  по степеням  $x - c$ , нужно по схеме Горнера поочередно разделить с остатком на  $x - c$  многочлен  $f(x)$ , затем первое неполное частное, второе неполное частное и т. д. Получаемые при этом остатки и являются искомыми коэффициентами.

Разложим, например, многочлен  $f(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 5x + 1$  по степеням  $x - 1$ :

	1	2	3	5	1	
1	1	3	6	11	12	$\leftarrow f(c)$
1	1	4	10	21	$\leftarrow \frac{f'(1)}{1!}$	
1	1	5	15	$\leftarrow \frac{f''(1)}{2!}$		
1	1	6	$\leftarrow \frac{f'''(1)}{3!}$			
1	1	$\leftarrow \frac{f^{IV}(1)}{4!}$				

Разделив с остатком  $f(x)$  на  $x - 1$ , мы во второй строке схемы Горнера получим коэффициенты первого неполного частного  $s_1(x)$ . Считаем эту строку первой строкой схемы Горнера для многочлена  $s_1(x)$ , делим его на  $x - 1$  и т. д. В результате получаем  $f(x) = 12 + 21 \times (x - 1) + 15(x - 1)^2 + 6(x - 1)^3 + (x - 1)^4$ .

Заметим, что теперь мы можем легко найти значения производных многочлена  $f(x)$  при  $x = 1$ , не вычисляя са-



мих производных. Например, из  $\frac{f''(1)}{2!} = 15$  следует, что  $f''(1) = 15 \cdot 2! = 30$ , из  $\frac{f'''(1)}{3!} = 6$  — что  $f'''(1) = 36$ .

## Упражнения

86. Разложите многочлен  $f(x)$  по степеням  $x - c$ , если:

а)  $f(x) = x^5 - 2x^2 + 3x - 4$ ,  $c = -2$ ; б)  $f(x) = x^4 - 32x + 7$ .

87. Найдите такой многочлен  $f(x)$  третьей степени, что  $f(2) = 3$ ,  $f'(2) = -3$ ,  $f''(2) = 1$ ,  $f'''(2) = 4$ .

88. Вычислите:

а)  $(\sqrt{3} + \sqrt{5})^6$ ; б)  $(2x - 1)^5$ ; в)  $(a + b\sqrt{2})^5$ .

89. Докажите, что если  $f(x)$  — многочлен с рациональными коэффициентами и число  $a + b\sqrt{2}$  ( $a, b$  — рациональные числа) — его корень, то число  $a - b\sqrt{2}$  также является корнем  $f(x)$ .

90. Многочлен с рациональными коэффициентами  $f(x) = x^4 - 6x^3 + ax^2 + 6x + b$  имеет корень  $x_1 = 3 - 2\sqrt{2}$ . Найдите значения параметров  $a$  и  $b$  и все корни данного многочлена.

## РАЦИОНАЛЬНЫЕ КОРНИ МНОГОЧЛЕНА

Как мы уже отмечали, одной из важнейших задач в теории многочленов является задача отыскания их корней. Для решения этой задачи можно использовать метод подбора, т. е. брать наугад число и проверять, является ли оно корнем данного многочлена. При этом можно довольно быстро «натолкнуться» на корень, а можно и никогда его не найти. Ведь проверить все числа невозможно, так как их бесконечно много. Другое дело, если бы нам удалось сузить область поиска, например знать, что искомые корни находятся, скажем, среди тридцати указанных чисел. А для тридцати чисел можно и проверку сделать. В связи со всем сказанным выше важным и интересным представляется такое утверждение.

*Если несократимая дробь  $l/t$  ( $l, t$  — целые числа) является корнем многочлена  $f(x)$  с целыми коэффициен-*

тами, то старший коэффициент этого многочлена делится на  $m$ , а свободный член — на  $l$ .

В самом деле, если  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ,  $a_n \neq 0$ , где  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$  — целые числа, то  $f(l/m) = 0$ , т. е.

$$a_n (l/m)^n + a_{n-1} (l/m)^{n-1} + \dots + a_1 l/m + a_0 = 0.$$

Умножим обе части этого равенства на  $m^n$ . Получим

$$a_n l^n + a_{n-1} l^{n-1} m + \dots + a_1 l m^{n-1} + a_0 m^n = 0.$$

Отсюда следует

$$a_n l^n = m(-a_{n-1} l^{n-1} - \dots - a_1 l m^{n-2} - a_0 m^{n-1}).$$

Видим, что целое число  $a_n l^n$  делится на  $m$ . Но  $l/m$  — несократимая дробь, т. е. числа  $l$  и  $m$  взаимно просты, а тогда, как известно из теории делимости целых чисел, числа  $l^n$  и  $m$  тоже взаимно просты. Итак,  $a_n l^n$  делится на  $m$  и  $m$  взаимно просто с  $l^n$ , значит,  $a_n$  делится на  $m$ .

Аналогично доказывается, что  $a_0$  делится на  $l$ . Читателю предлагается сделать это самостоятельно.

Доказанная теорема позволяет значительно сузить область поиска рациональных корней многочлена с целыми коэффициентами. Продемонстрируем это на конкретном примере. Найдем рациональные корни многочлена  $f(x) = 6x^4 + 13x^3 - 24x^2 - 8x + 8$ . Согласно теореме, рациональные корни этого многочлена находятся среди несократимых дробей вида  $l/m$ , где  $l$  — делитель свободного члена  $a_0 = 8$ , а  $m$  — делитель старшего коэффициента  $a_4 = 6$ . При этом, если дробь  $l/m$  — отрицательная, то знак «—» будем относить к ее числителю. Например,  $-\frac{1}{3} = \frac{-1}{3}$ . Значит, мы можем сказать, что  $l$  — делитель числа 8, а  $m$  — положительный делитель числа 6.

Так как делители числа 8 — это  $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$ , а

положительными делителями числа 6 будут 1, 2, 3, 6, то рациональные корни рассматриваемого многочлена находятся среди чисел  $\pm 1, \pm 1/2, \pm 1/3, \pm 1/6, \pm 2, \pm 2/3, \pm 4, \pm 4/3, \pm 8, \pm 8/3$ . Напомним, что мы выписали лишь несократимые дроби.

Таким образом, мы имеем двадцать чисел — «кандидатов» в корни. Осталось только проверить каждое из них и отобрать те, которые действительно являются корнями. Но опять-таки придется сделать довольно много проверок. А вот следующая теорема упрощает эту работу.

*Если несократимая дробь  $l/m$  является корнем многочлена  $f(x)$  с целыми коэффициентами, то  $f(k)$  делится на  $l - km$  для любого целого числа  $k$  при условии, что  $l - km \neq 0$ .*

Для доказательства этой теоремы разделим  $f(x)$  на  $x - k$  с остатком. Получим  $f(x) = (x - k)s(x) + f(k)$ . Так как  $f(x)$  — многочлен с целыми коэффициентами, то таким является и многочлен  $s(x)$ , а  $f(k)$  — целое число. Пусть  $s(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \dots + b_1x + b_0$ . Тогда  $f(x) - f(k) = (x - k)(b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \dots + b_1x + b_0)$ . Положим в этом равенстве  $x = l/m$ . Учитывая, что  $f(l/m) = 0$ , получаем

$$-f(k) = \left(\frac{l}{m} - k\right) \left(b_{n-1} \left(\frac{l}{m}\right)^{n-1} + b_{n-2} \left(\frac{l}{m}\right)^{n-2} + \dots + b_1 \frac{l}{m} + b_0\right).$$

Умножим обе части последнего равенства на  $m^n$ :

$$-m^n f(k) = (l - km) (b_{n-1} l^{n-1} + b_{n-2} l^{n-2} m + \dots + b_1 l m^{n-2} + b_0 m^{n-1}).$$

Отсюда следует, что целое число  $m^n f(k)$  делится на

$l - km$ . Но так как  $l$  и  $m$  взаимно просты, то  $m^n$  и  $l - km$  тоже взаимно просты, а значит,  $f(k)$  делится на  $l - km$ . Теорема доказана.

Вернемся теперь к нашему примеру и, используя доказанную теорему, еще больше сузим круг поисков рациональных корней. Применим указанную теорему при  $k = 1$  и  $k = -1$ , т. е. если несократимая дробь  $l/m$  является корнем многочлена  $f(x)$ , то  $f(1) : (l - m)$ , а  $f(-1) : (l + m)$ . Легко находим, что в нашем случае  $f(1) = -5$ , а  $f(-1) = -15$ . Заметим, что заодно мы исключили из рассмотрения  $\pm 1$ .

Итак, рациональные корни нашего многочлена следует искать среди чисел  $\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{1}{6}, \pm 2, \pm \frac{2}{3}, \pm 4, \pm \frac{4}{3}, \pm 8, \pm \frac{8}{3}$ .

Рассмотрим  $\frac{l}{m} = \frac{1}{2}$ . Тогда  $l - m = -1$  и  $f(1) = -5$  делится на это число. Далее,  $l + m = 3$  и  $f(-1) = -15$  также делится на 3. Значит, дробь  $\frac{1}{2}$  остается в числе «кандидатов» в корни.

Пусть теперь  $\frac{l}{m} = -\frac{1}{2} = \frac{-1}{2}$ . В этом случае  $l - m = -3$  и  $f(1) = -5$  не делится на  $-3$ . Значит, дробь  $-\frac{1}{2}$  не может быть корнем данного многочлена, и мы исключаем ее из дальнейшего рассмотрения. Выполнив проверку для каждой из выписанных выше дробей, получим, что искомые корни находятся среди чисел  $1/2, \pm 2/3, 2, -4$ .

Таким образом, довольно-таки простым приемом мы значительно сузили область поиска рациональных корней рассматриваемого многочлена. Ну, а для проверки оставшихся чисел применим схему Горнера:

	6	13	-24	-8	8
1/2	6	16	-16	-16	0

Видим, что  $1/2$  — корень многочлена  $f(x)$  и  $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)(6x^3 + 16x^2 - 16x - 16) = (2x - 1)(3x^3 + 8x^2 - 8x - 8)$ . Ясно, что все другие корни многочлена  $f(x)$  совпадают с корнями многочлена  $g(x) = 3x^3 + 8x^2 - 8x - 8$ , а значит, дальнейшую проверку «кандидатов» в корни можно производить уже для этого многочлена. При этом мы несколько выиграем по времени в вычислениях, так как проверку будем выполнять для более «короткого» многочлена. Находим:

	3	8	-8	-8
2/3	3	10	-4/3	-80/9

Получили, что остаток при делении  $g(x)$  на  $x - 2/3$  равен  $-80/9$ , т. е.  $2/3$  не является корнем многочлена  $g(x)$ , а значит, и  $f(x)$ .

Далее легко находим, что  $-2/3$  — корень многочлена  $g(x)$  и  $g(x) = (3x + 2)(x^2 + 2x - 4)$ . Тогда  $f(x) = (2x - 1)(3x + 2)(x^2 + 2x - 4)$ . Дальнейшую проверку можно проводить для многочлена  $x^2 + 2x - 4$ , что, конечно, проще, чем для  $g(x)$  или тем более для  $f(x)$ . В результате получим, что числа 2 и  $-4$  корнями не являются.

Итак, многочлен  $f(x) = 6x^4 + 13x^3 - 24x^2 - 8x + 8$  имеет два рациональных корня:  $1/2$  и  $-2/3$ .

Напомним, что описанный выше метод дает возможность находить лишь рациональные корни многочлена с целыми коэффициентами. Между тем, многочлен может иметь и иррациональные корни. Так, например, рассмотренный в примере многочлен имеет еще два корня:  $-1 \pm \sqrt{5}$  (это корни многочлена  $x^2 + 2x - 4$ ). А вообще говоря, многочлен может и вовсе не иметь рациональных корней.

Теперь дадим несколько полезных советов.

1. При испытании «кандидатов» в корни многочлена  $f(x)$  с помощью второй из доказанных выше теорем обычно используют последнюю для случаев  $k = \pm 1$ . Другими словами, если  $l/m$  — «кандидат» в корни, то проверяют, делятся ли  $f(1)$  и  $f(-1)$  на  $l - m$  и  $l + m$  соответственно. Но может случиться так, что, например,  $f(1) = 0$ , т. е.  $1$  — корень, а тогда  $f(1)$  делится на любое число, и наша проверка теряет смысл. В этом случае следует разделить  $f(x)$  на  $x - 1$ , т. е. получить  $f(x) = (x - 1)s(x)$ , и проводить испытания для многочлена  $s(x)$ . При этом не следует забывать, что один корень многочлена  $f(x)$  —  $x_1 = 1$  — мы уже нашли.

2. Если при проверке «кандидатов» в корни, оставшихся после использования второй теоремы о рациональных корнях, по схеме Горнера получим, что, например,  $l/m$  — корень, то следует найти его кратность. Если она равна, скажем,  $k$ , то  $f(x) = (x - l/m)^k s(x)$ , и дальнейшую проверку можно выполнять для  $s(x)$ , что сокращает вычисления.

Таким образом, мы научились находить рациональные корни многочлена с целыми коэффициентами. Оказывается, что тем самым мы научились находить и рациональные корни многочлена с рациональными коэффициентами. В самом деле, если мы имеем, например, многочлен  $f(x) = x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{6}x^2 + \frac{3}{8}x + 2$ , то, приведя

коэффициенты к общему знаменателю и вынеся его за скобки, получим  $f(x) = \frac{1}{24}(24x^4 + 16x^3 - 20x^2 + 9x + 48)$ . Ясно, что корни многочлена  $f(x)$  совпадают с корнями многочлена, стоящего в скобках, а у него коэффициенты — целые числа.

Рассмотренный способ отыскания рациональных корней многочлена можно успешно применять для решения самых разнообразных задач.

Докажем, например, что  $\sin 10^\circ$  — число иррациональное. Воспользуемся известной формулой  $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$ . Отсюда  $\sin 30^\circ = 3 \sin 10^\circ - 4 \sin^3 10^\circ$ . Учитывая, что  $\sin 30^\circ = 0,5$  и проводя несложные преобразования, получаем  $8 \sin^3 10^\circ - 6 \sin 10^\circ + 1 = 0$ . Следовательно,  $\sin 10^\circ$  является корнем многочлена  $f(x) = 8x^3 - 6x + 1$ . Если же мы будем искать рациональные корни этого многочлена, то убедимся, что их нет. Значит, корень  $\sin 10^\circ$  не является рациональным числом, т. е.  $\sin 10^\circ$  — число иррациональное.

## У п р а ж н е н и я

91. Найдите рациональные корни многочлена  $f(x)$ , если:

а)  $f(x) = 2x^3 + x^2 + 47x - 24$ ;

б)  $f(x) = 5x^4 - 6x^3 - 15x^2 + 43x - 30$ ;

в)  $f(x) = x^3 - \frac{1}{6}x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{3}$ ;

г)  $f(x) = x^3 - 5x^2 - x + 21$ .

92. Докажите, что  $\cos 20^\circ$  — число иррациональное.

93. Докажите, что уравнение  $x^4 - 3x^3y = y^4$  не имеет решений в целых числах, отличных от нуля.

94. Докажите, что у многочлена  $f(x)$  со старшим коэффициентом  $a_n = 1$  все рациональные корни — целые числа.

95. Пусть  $f(x)$  — многочлен с целыми коэффициентами и несократимая дробь  $l/m$  является его корнем. Докажите, что если:

а)  $f(0)$ ,  $f(1)$  — нечетные числа, то  $m$  — четное число;

- б)  $f(0)$ ,  $f(1)$  — нечетные числа, то  $f(x)$  не имеет целых корней;  
 в) при каком-либо целом  $k$  числа  $f(k)$ ,  $f(k+1)$  — нечетные, то  $f(x)$  не имеет целых корней.

## НАИБОЛЬШИЙ ОБЩИЙ ДЕЛИТЕЛЬ

Как уже не раз отмечалось, множество многочленов напоминает множество целых чисел в том смысле, что над многочленами мы можем производить операции, аналогичные операциям над целыми числами, и свойства этих операций одинаковы. Сейчас мы распространим эту аналогию дальше.

Для целых чисел существует понятие общего делителя. Без всякого труда такое же понятие можно ввести и для многочленов.

*Общим делителем многочленов  $f(x)$  и  $g(x)$  называется такой многочлен  $h(x)$ , что  $f(x) : h(x)$  и  $g(x) : h(x)$ .*

Нетрудно убедиться, что, например, многочлен  $h(x) = x - 1$  является общим делителем многочленов  $f(x) = x^2 - 1$  и  $g(x) = x^3 - 1$ .

Далее, для целых чисел существует понятие наибольшего общего делителя, а именно, наибольший общий делитель двух целых чисел — это их самый большой по величине общий делитель. Для многочленов же такое определение не годится, так как сравнивать их по величине мы не можем (для них не существует понятий «больше», «меньше»). Мы можем лишь сравнивать степени многочленов, поэтому разумно сформулировать такое определение.

*Наибольшим общим делителем двух многочленов называется их общий делитель самой большой степени.*

В дальнейшем вместо «наибольший общий делитель» будем писать НОД.

Таким образом, мы ввели понятие НОД двух многочленов  $f(x)$  и  $g(x)$ . Но всегда ли он существует? Попытаемся ответить на этот вопрос.



Пусть  $f(x)$  и  $g(x)$  — нулевые многочлены. Тогда и  $f(x)$ , и  $g(x)$  делятся на любой многочлен, т. е. все многочлены являются их общими делителями. А среди всех многочленов выбрать многочлен наибольшей степени невозможно. В самом деле, если мы возьмем, например, многочлен степени  $n$ , то можно указать и многочлен степени  $n + 1$ . Значит, если  $f(x)$  и  $g(x)$  — нулевые многочлены, то для них НОД не существует.

Пусть теперь  $f(x)$  и  $g(x)$  — ненулевые многочлены и  $\text{ст.} f(x) = n$ ,  $\text{ст.} g(x) = m$ . Если  $h(x)$  — их произвольный общий делитель, т. е.  $f(x) : h(x)$  и  $g(x) : h(x)$ , то, как известно,  $\text{ст.} h(x) \leq \text{ст.} f(x)$  и  $\text{ст.} h(x) \leq \text{ст.} g(x)$ . Обозначим через  $k$  меньшее из чисел  $m$  и  $n$  (если  $m = n$ , то  $k = m = n$ ). Тогда  $\text{ст.} h(x) \leq k$ . Следовательно, степени общих делителей многочленов  $f(x)$  и  $g(x)$  находятся среди чисел  $0, 1, 2, \dots, k$ , т. е. мы имеем конечное число степеней общих делителей, а значит, среди них можно найти и наибольшую. Следовательно, НОД в этом случае существует.

Осталось рассмотреть случай, когда один из исходных многочленов нулевой, а второй ненулевой. Вы без труда убедитесь, что и в этом случае НОД существует.

Итак, НОД не существует только для двух нулевых многочленов. В дальнейшем рассматривая НОД многочленов  $f(x)$  и  $g(x)$ , всегда будем предполагать, что он есть, т. е. что хотя бы один из наших многочленов ненулевой.

Выясним теперь, сколько может быть НОД для данных многочленов  $f(x)$  и  $g(x)$ . Не удивляйтесь такому вопросу, сейчас вы убедитесь, что наибольших общих делителей для данных многочленов существует бесконечно много.

Если  $d(x)$  — НОД многочленов  $f(x)$  и  $g(x)$ , то  $cd(x)$  — тоже НОД этих многочленов для любого числа  $c$ , отличного от нуля.

В самом деле, так как  $f(x) \div d(x)$  и  $g(x) \div d(x)$ , то, как известно из свойств делимости многочленов,  $f(x) \div cd(x)$  и  $g(x) \div cd(x)$  для любого числа  $c \neq 0$ . Значит,  $cd(x)$  — общий делитель многочленов  $f(x)$  и  $g(x)$ . Далее, ст.  $cd(x) = \text{ст. } c + \text{ст. } d(x) = \text{ст. } d(x)$ . Но  $d(x)$  — общий делитель самой большой степени, а тогда таковым является и  $cd(x)$ . Значит,  $cd(x)$  — тоже НОД наших многочленов.

Из доказанной теоремы и следует, что число наибольших общих делителей двух многочленов бесконечно. В самом деле, если  $d(x)$  — их НОД, то  $2d(x)$ ,  $3d(x)$ , ... также являются наибольшими общими делителями. Следовательно, если ставится задача нахождения НОД многочленов, то подразумевается, что необходимо найти хотя бы один из них.

## Упражнения

96. Найдите НОД многочленов  $f(x)$  и  $g(x)$ , если:

- а)  $f(x) = 0$ ,  $g(x) \neq 0$ ;                      б)  $f(x) \div g(x)$ ;  
 в)  $f(x) = x^2 - 1$ ,  $g(x) = x^4 - 1$ ;    г)  $f(x) = x^{100} + x^{50}$ ,  $g(x) = x$ ;  
 д)  $f(x) = 3$ ,  $g(x) = x^2 + 5$ ;              е)  $f(x) = x^2 + 1$ ,  $g(x) = x$ ;  
 ж)  $f(x) = x^3 + 2x^2 - 2x - 1$ ,  $g(x) = 2x^2 + x - 3$ .

## АЛГОРИТМ ЕВКЛИДА \*

Итак, мы познакомились с понятием НОД двух многочленов, выяснили, когда он существует. Однако для практики важен способ его нахождения. В простейших случаях, как вы убедились, выполняя упражнения, это сделать нетрудно. А как быть, если, например,  $f(x) = x^{10} + x + 1$ , а  $g(x) = x^5 + 2x^2 + 3$ ?

Оказывается, существует метод нахождения НОД

---

\* Евклид (III в. до н. э.) — древнегреческий математик.

двух многочленов, который называется *алгоритмом Евклида*. Опишем этот алгоритм.

Пусть  $f(x)$  и  $g(x)$  ( $g(x) \neq 0$ ) — многочлены, НОД которых нужно найти. Алгоритм Евклида состоит из последовательности шагов, на каждом из которых следует выполнить какие-то действия.

**Шаг 1.** Разделим  $f(x)$  на  $g(x)$  с остатком. Получим  $f(x) = g(x)s_1(x) + r_1(x)$  и либо  $r_1(x) = 0$ , либо  $\text{ст. } r_1(x) < \text{ст. } g(x)$ . Если  $r_1(x) = 0$ , то  $f(x) : g(x)$ , и в этом случае  $g(x)$  — НОД. Если же  $r_1(x) \neq 0$ , то переходим к шагу 2.

**Шаг 2.** Разделим  $g(x)$  на  $r_1(x)$  с остатком. Получим  $g(x) = r_1(x)s_2(x) + r_2(x)$  и либо  $r_2(x) = 0$ , либо  $\text{ст. } r_2(x) < \text{ст. } r_1(x)$ . Если  $r_2(x) \neq 0$ , то переходим к шагу 3.

**Шаг 3.** Разделим  $r_1(x)$  на  $r_2(x)$  с остатком. Тогда  $r_1(x) = r_2(x)s_3(x) + r_3(x)$  и либо  $r_3(x) = 0$ , либо  $\text{ст. } r_3(x) < \text{ст. } r_2(x)$ . Если  $r_3(x) \neq 0$ , то переходим к шагу 4.

**Шаг 4.** Разделим  $r_2(x)$  на  $r_3(x)$  с остатком. Если полученный при этом остаток  $r_4(x)$  отличен от нуля, то переходим к шагу 5.

**Шаг 5.** Делим  $r_3(x)$  на  $r_4(x)$  с остатком и т. д.

Вы уже, вероятно, уяснили принцип наших дальнейших действий: мы последовательно делим предыдущий остаток на последующий. Процесс такого деления можно продолжать до тех пор, пока не получим на каком-то шаге остаток, равный нулю. После этого мы вынуждены остановить процесс деления, так как делить с остатком на нуль нельзя. Но получится ли когда-нибудь нулевой остаток? Легко убедимся, что да.

В самом деле, как следует из алгоритма Евклида, т. е. процесса последовательного деления, для степеней остатков имеют место следующие соотношения:  $\text{ст. } g(x) > \text{ст. } r_1(x) > \text{ст. } r_2(x) > \text{ст. } r_3(x) > \dots$ . Видим, что с каждым шагом алгоритма Евклида степени остатков умень-



Просмотрим все равенства последовательности Евклида, начиная снизу. Из последнего равенства получаем, что  $r_{h-1}(x) : r_h(x)$ . В следующем равенстве  $r_h(x) : r_h(x)$  и  $r_{h-1}(x) : r_h(x)$ , а значит,  $r_{h-2}(x) : r_h(x)$ . Аналогично, «поднявшись» к следующему равенству, найдем, что  $r_{h-3}(x) : r_h(x)$ , так как  $r_{h-1}(x) : r_h(x)$  и  $r_{h-2}(x) : r_h(x)$  и т. д. Продолжая подобные рассуждения, получаем, что  $f(x)$  и  $g(x)$  делятся на  $r_h(x)$ , т. е. что  $r_h(x)$  — общий делитель многочленов  $f(x)$  и  $g(x)$ .

Осталось доказать, что  $r_h(x)$  — это общий делитель наибольшей степени. Другими словами, нужно доказать, что если  $h(x)$  — произвольный общий делитель многочленов  $f(x)$  и  $g(x)$ , то  $\text{ст.} h(x) \leq \text{ст.} r_h(x)$ . Для этого рассмотрим все равенства последовательности Евклида, начиная на этот раз сверху. Так как  $f(x) : h(x)$  и  $g(x) : h(x)$ , то из первого равенства получим, что  $r_1(x) : h(x)$ . Во втором равенстве теперь  $g(x) : h(x)$  и  $r_1(x) : h(x)$ , а значит,  $r_2(x) : h(x)$ . Аналогично из третьего равенства следует, что  $r_3(x) : h(x)$  и т. д. Спускаясь таким образом вниз, мы из предпоследнего равенства получаем, что  $r_h(x) : h(x)$ . Тогда, как известно,  $\text{ст.} h(x) \leq \text{ст.} r_h(x)$ , и этим теорема доказана полностью.

Теперь найдем, используя алгоритм Евклида, НОД многочленов  $f(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 3$  и  $g(x) = x^2 + x - 6$ .

На первом шаге разделим с остатком  $f(x)$  на  $g(x)$ :

$$\begin{array}{rcl}
 f(x) \rightarrow & x^3 + 4x^2 + 4x + 3 & \Big| x^2 + x - 6 \leftarrow g(x) \\
 - & & \hline
 & x^3 + x^2 - 6x & \Big| x + 3 \leftarrow s_1(x) \\
 \hline
 & 3x^2 + 10x + 3 & \\
 - & & \\
 & 3x^2 + 3x - 18 & \\
 \hline
 r_1(x) \rightarrow & & 7x + 21
 \end{array}$$

Далее нужно разделить с остатком  $g(x)$  на  $r_1(x)$ :

$$\begin{array}{r|l}
 g(x) \rightarrow x^2 + x - 6 & 7x + 21 \leftarrow r_1(x) \\
 \hline
 & \frac{1}{7}x - \frac{2}{7} \leftarrow s_2(x) \\
 & \hline
 & -2x - 6 \\
 & \hline
 & -2x - 6 \\
 & \hline
 r_2(x) \rightarrow & 0
 \end{array}$$

Остаток  $r_2(x) = 0$ , а значит, алгоритм Евклида обрывается. Последний же отличный от нуля остаток  $r_1(x) = 7x + 21$ . По доказанной выше теореме  $r_1(x)$  и есть НОД многочленов  $f(x)$  и  $g(x)$ .

Итак, НОД многочленов  $f(x)$  и  $g(x)$  найден. Но у нас есть возможность указать НОД, который выглядит несколько проще. Вспомним, если НОД умножить на число, отличное от нуля, то опять получим НОД этих же многочленов. Следовательно, умножив  $r_1(x)$  на  $1/7$ , получим НОД  $d(x) = x + 3$  многочленов  $f(x)$  и  $g(x)$ .

Таким образом, алгоритм Евклида позволяет найти какой-то один НОД многочленов  $f(x)$  и  $g(x)$ . Но, как было установлено ранее, существует бесконечно много наибольших общих делителей этих многочленов. Как же найти их все? Эта задача, оказывается, решается очень просто.

В самом деле, из алгоритма Евклида следует, что  $r_h(x)$  — НОД. Пусть  $d_1(x)$  — другой НОД этих же многочленов. В доказательстве теоремы о наибольшем общем делителе двух многочленов отмечалось, что  $r_h(x)$  делится на любой общий делитель многочленов  $f(x)$  и  $g(x)$ . В частности,  $r_h(x) : d_1(x)$ , т. е.  $r_h(x) = d_1(x)s(x)$ . Тогда ст.  $r_h(x) =$  ст.  $d_1(x) +$  ст.  $s(x)$ . Но  $r_h(x)$  — НОД и  $d_1(x)$  — НОД, а значит, ст.  $r_h(x) =$  ст.  $d_1(x)$ . Отсюда следует, что

ст.  $s(x) = 0$ , т. е.  $s(x) = c$  — число. Следовательно,  $r_h(x) = cd_1(x)$  и  $d_1(x) = \frac{1}{c}r_h(x)$ . Таким образом, любой НОД можно получить из  $r_h(x)$ , умножив его на произвольное, отличное от нуля число. С другой стороны, так как  $r_h(x)$  — НОД, то  $cr_h(x)$  — тоже НОД при любом  $c \neq 0$ .

Итак, если  $d(x)$  — НОД многочленов  $f(x)$  и  $g(x)$ , найденный с помощью алгоритма Евклида, то, умножая его на числа, отличные от нуля, получаем все наибольшие общие делители этих многочленов.

В заключение установим еще один полезный факт. Пусть  $f(x)$  и  $g(x)$  — многочлены с рациональными коэффициентами. Рассмотрим последовательность Евклида для этих многочленов. Мы ранее отмечали, что при делении многочленов с рациональными коэффициентами неполное частное и остаток — многочлены с рациональными коэффициентами. Значит,  $r_1(x)$  имеет рациональные коэффициенты. Тогда по той же причине  $r_2(x)$  также имеет рациональные коэффициенты и т. д. В результате получим, что  $r_h(x)$  — многочлен с рациональными коэффициентами.

Итак, можно сформулировать следующее предложение.

*Если  $f(x)$  и  $g(x)$  — многочлены с рациональными коэффициентами, то их НОД, найденный с помощью алгоритма Евклида, также имеет рациональные коэффициенты.*

## Упражнения

97. Найдите НОД многочленов  $f(x)$  и  $g(x)$ , если:

- а)  $f(x) = x^3 + 4x^2 + 5x + 2$ ,  $g(x) = x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 6x - 3$ ;
- б)  $f(x) = x^2 + 2x + 4$ ,  $g(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 - 2x - 4$ ;
- в)  $f(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 - 2x - 3$ ,  $g(x) = x^5 - 3x^4 + x^2 - 2x - 3$ .

98. Докажите, что два различных наибольших общих делителя

многочленов  $f(x)$  и  $g(x)$  отличаются друг от друга лишь постоянным множителем.

99. Докажите, что общий делитель многочленов  $f(x)$  и  $g(x)$  является их наибольшим общим делителем тогда и только тогда, когда он делится на каждый общий делитель этих многочленов.

### ЛИНЕЙНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ НАИБОЛЬШЕГО ОБЩЕГО ДЕЛИТЕЛЯ

Рассмотрим последовательность Евклида для многочленов  $f(x)$  и  $g(x)$ . Как мы уже доказали,  $r_k(x)$  — НОД этих многочленов. Из предпоследнего равенства этой последовательности имеем

$$r_k(x) = r_{k-2}(x) + (-s_k(x))r_{k-1}(x).$$

«Поднимемся» к следующему равенству, выразим из него  $r_{k-1}(x)$  и подставим в выражение для  $r_k(x)$ . Получим  $r_k(x) = r_{k-2}(x) + (-s_k(x))(r_{k-3}(x) - r_{k-2}(x)s_{k-1}(x))$ , или, после некоторых преобразований,

$$r_k(x) = (-s_k(x))r_{k-3}(x) + (1 + s_k(x)s_{k-1}(x))r_{k-2}(x).$$

Видим, что  $r_k(x)$  выражается через  $r_{k-3}(x)$  и  $r_{k-2}(x)$ . «Поднимемся» еще на одно равенство, выразим из него  $r_{k-2}(x)$  и подставим в выражение для  $r_k(x)$ . В результате получим, что  $r_k(x)$  выражается через  $r_{k-4}(x)$  и  $r_{k-3}(x)$  и т. д. Продолжая подобные рассуждения, наконец, получаем выражение  $r_k(x)$  через  $f(x)$  и  $g(x)$ . Другими словами, мы найдем такие многочлены  $u_1(x)$  и  $v_1(x)$ , что  $r_k(x) = u_1(x)f(x) + v_1(x)g(x)$ .

Если же  $d(x)$  — любой другой НОД многочленов  $f(x)$  и  $g(x)$ , то, как известно,  $d(x) = cr_k(x)$  для некоторого числа  $c$ , отличного от нуля. Тогда  $d(x) = cr_k(x) = cu_1(x)f(x) + cv_1(x)g(x)$ . Обозначив многочлены  $cu_1(x)$  и  $cv_1(x)$  через  $u(x)$  и  $v(x)$  соответственно, получим

$$d(x) = u(x)f(x) + v(x)g(x).$$



Итак, доказано следующее утверждение.

*Если  $d(x)$  — НОД многочленов  $f(x)$  и  $g(x)$ , то существуют такие многочлены  $u(x)$  и  $v(x)$ , что  $d(x) = u(x)f(x) + v(x)g(x)$ .*

Такое представление  $d(x)$  называется его *линейным представлением*.

Отметим еще один факт, который будем использовать в дальнейшем. Если  $f(x)$  и  $g(x)$  — многочлены с рациональными коэффициентами, то, как известно, в последовательности Евклида для этих многочленов все неполные частные и остатки также являются многочленами с рациональными коэффициентами. Выражая теперь НОД, т. е.  $r_k(x)$ , через  $f(x)$  и  $g(x)$  по предложенной выше схеме, нетрудно заметить, что полученные в результате многочлены  $u_1(x)$  и  $v_1(x)$  также имеют рациональные коэффициенты. Если же  $d(x)$  — любой другой НОД с рациональными коэффициентами, то ясно, что  $d(x) = cr_k(x)$ , где  $c$  — рациональное число, отличное от нуля. А тогда  $u(x) = cu_1(x)$  и  $v(x) = cv_1(x)$  — многочлены с рациональными коэффициентами. Сформулируем доказанное выше в виде утверждения.

*Если  $f(x)$  и  $g(x)$  — многочлены с рациональными коэффициентами,  $d(x)$  — их НОД, имеющий рациональные коэффициенты, то существуют такие многочлены  $u(x)$  и  $v(x)$  с рациональными же коэффициентами, что  $d(x) = u(x)f(x) + v(x)g(x)$ .*

Рассмотрим теперь пример. Найдем НОД многочленов  $f(x) = 3x^4 + 8x^3 + 6x^2 + 3x - 2$  и  $g(x) = 3x^4 - x^3 - 9x^2 - 3x + 2$  и его линейное представление.

Используем алгоритм Евклида. Делим  $f(x)$  на  $g(x)$  с остатком:

$$\begin{array}{r|l} 3x^4 + 8x^3 + 6x^2 + 3x - 2 & 3x^4 - x^3 - 9x^2 - 3x + 2 \\ - (3x^4 - x^3 - 9x^2 - 3x + 2) & 1 \\ \hline & 9x^3 + 15x^2 + 6x - 4 \end{array}$$

Далее делим  $g(x)$  на первый остаток:

$$\begin{array}{r}
 3x^4 - x^3 - 9x^2 - 3x + 2 \\
 - (3x^4 + 5x^3 + 2x^2 - \frac{4}{3}x) \\
 \hline
 -6x^3 - 11x^2 - \frac{5}{3}x + 2 \\
 - (-6x^3 - 10x^2 - 4x + \frac{8}{3}) \\
 \hline
 -x^2 + \frac{7}{3}x - \frac{2}{3}
 \end{array}
 \quad \Bigg| \quad
 \begin{array}{r}
 9x^3 + 15x^2 + 6x - 4 \\
 \hline
 \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}
 \end{array}$$

Теперь делим первый остаток на второй:

$$\begin{array}{r}
 9x^3 + 15x^2 + 6x - 4 \\
 - (9x^3 - 21x^2 + 6x) \\
 \hline
 36x^2 - 4 \\
 - (36x^2 - 84x + 24) \\
 \hline
 84x - 28
 \end{array}
 \quad \Bigg| \quad
 \begin{array}{r}
 -x^2 + \frac{7}{3}x - \frac{2}{3} \\
 \hline
 -9x - 36
 \end{array}$$

Делим второй остаток на третий:

$$\begin{array}{r}
 -x^2 + \frac{7}{3}x - \frac{2}{3} \\
 - (-x^2 + \frac{1}{3}x) \\
 \hline
 2x - \frac{2}{3} \\
 - (2x - \frac{2}{3}) \\
 \hline
 0
 \end{array}
 \quad \Bigg| \quad
 \begin{array}{r}
 84x - 28 \\
 \hline
 -\frac{1}{84}x + \frac{1}{42}
 \end{array}$$

Итак, последний отличный от нуля остаток, т. е. НОД многочленов  $f(x)$  и  $g(x)$ , —  $r_3(x) = 84x - 28$ . Найдем теперь его линейное представление. Вначале запишем по-

следовательность Евклида для данных многочленов  $f(x)$  и  $g(x)$ :

$$\begin{aligned}f(x) &= 1g(x) + r_1(x), \\g(x) &= \left(\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}\right)r_1(x) + r_2(x), \\r_1(x) &= (-9x - 36)r_2(x) + r_3(x), \\r_2(x) &= \left(-\frac{1}{84}x + \frac{1}{42}\right)r_3(x).\end{aligned}$$

Заметим, что последнее равенство можно опустить, так как при нахождении линейного представления оно не нужно. Многочлены  $r_1(x)$ ,  $r_2(x)$ ,  $r_3(x)$  не записаны в явном виде, поскольку мы их не используем.

Из третьего равенства выражаем НОД, т. е.  $r_3(x)$ :

$$r_3(x) = r_1(x) + (9x + 36)r_2(x).$$

Из второго равенства выражаем  $r_2(x)$  и подставляем в полученное выражение для  $r_3(x)$ . Тогда имеем  $r_3(x) = r_1(x) + (9x + 36)\left(g(x) - \left(\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}\right)r_1(x)\right)$ . После несложных преобразований имеем

$$r_3(x) = (9x + 36)g(x) + (-3x^2 - 6x + 25)r_1(x).$$

И, наконец, выразив из первого равенства  $r_1(x)$  и подставив в последнее выражение для  $r_3(x)$ , после некоторых преобразований получим

$$\begin{aligned}r_3(x) &= (-3x^2 - 6x + 25)f(x) + (3x^2 + 15x + 11)g(x), \\ \text{т. е. в нашем случае } u(x) &= -3x^2 - 6x + 25, \text{ а } v(x) = \\ &= 3x^2 + 15x + 11.\end{aligned}$$

Таким образом, мы нашли НОД, равный  $r_3(x) = 84x - 28$ , и его линейное представление. Но если мы этот НОД умножим на  $1/28$ , то получим другой НОД, равный  $3x - 1$ . Чтобы найти линейное представление

этого наибольшего общего делителя, нужно обе части выражения для  $r_3(x)$  умножить на  $1/28$ . Имеем

$$3x - 1 = \frac{1}{28} (-3x^2 - 6x + 25) f(x) + \\ + \frac{1}{28} (3x^2 + 15x + 11) g(x).$$

## У п р а ж н е н и я

**100.** Найдите НОД многочленов  $f(x)$  и  $g(x)$  и его линейное представление, если:

а)  $f(x) = x^4 + 4x^3 - 7x + 2$ ,  $g(x) = x^3 + 3x^2 - 4$ ;

б)  $f(x) = x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 2$ ,  $g(x) = x^5 - 1$ ;

в)  $f(x) = 3x^5 + 6x^4 + 3x^3 - x^2 - 2x - 1$ ,  $g(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ ;

г)  $f(x) = x^6 - x^4 + 3x^3 - 2x + 2$ ,  $g(x) = x^3 + 2$ .

## ВЗАИМНО ПРОСТЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ

Мы уже не один раз прибегали к аналогии многочленов с целыми числами. Используем ее и для введения понятия взаимно простых многочленов.

*Многочлены  $f(x)$  и  $g(x)$  будем называть взаимно простыми, если их НОД равен 1.*

Однако мы знаем, что многочлены  $f(x)$  и  $g(x)$  имеют бесконечно много наибольших общих делителей. Поэтому точнее было бы сказать, что  $f(x)$  и  $g(x)$  взаимно просты, если один из их наибольших общих делителей равен 1. А каковы в этом случае остальные наибольшие общие делители? Давайте разберемся в этом.

Если один из наибольших общих делителей многочленов  $f(x)$  и  $g(x)$  равен 1, то, как известно,  $c \cdot 1 = c$  — тоже НОД этих многочленов при любом  $c \neq 0$ . Обратно, если какое-то число  $c \neq 0$  — НОД рассматриваемых многочленов, то  $\frac{1}{c} \cdot c = 1$  — тоже НОД. Таким образом, можно

сделать вывод о необходимом и достаточном условии взаимной простоты многочленов.

*Многочлены  $f(x)$  и  $g(x)$  взаимно просты тогда и только тогда, когда их наибольшие общие делители есть многочлены нулевой степени, т. е. числа, отличные от нуля.*

Взаимно простыми, например, являются многочлены  $f(x) = x^2 + 2x - 5$  и  $g(x) = 8$ . В самом деле, если  $h(x)$  — их общий делитель, то  $g(x) : h(x)$ , а тогда ст.  $h(x) \leq \leq$  ст.  $g(x) = 0$ , т. е. ст.  $h(x) = 0$ . Следовательно, все общие делители многочленов  $f(x)$  и  $g(x)$  — многочлены только нулевой степени. Значит, и их НОД, т. е. общий делитель наибольшей степени, тоже имеет степень 0.

Для произвольных многочленов  $f(x)$  и  $g(x)$  вопрос о том, взаимно просты они или нет, тоже легко решается. Для этого достаточно найти НОД этих многочленов, что мы уже умеем делать. Если он имеет нулевую степень, то многочлены взаимно просты. Однако в некоторых случаях, особенно при доказательстве теорем, удобно использовать следующее условие взаимной простоты многочленов.

*Многочлены  $f(x)$  и  $g(x)$  взаимно просты тогда и только тогда, когда существуют такие многочлены  $u(x)$  и  $v(x)$ , что  $u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1$ .*

В самом деле, если  $f(x)$  и  $g(x)$  взаимно просты, т. е. их НОД равен 1, то по теореме о линейном представлении наибольшего общего делителя существуют такие многочлены  $u(x)$  и  $v(x)$ , что  $u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1$ .

Пусть теперь, наоборот, существуют такие многочлены  $u(x)$  и  $v(x)$ , что  $u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1$ . Если  $h(x)$  — общий делитель многочленов  $f(x)$  и  $g(x)$ , то, как следует из известных свойств делимости,  $(u(x)f(x) + v(x)g(x)) : h(x)$ , т. е.  $1 : h(x)$ . Отсюда следует, что ст.  $h(x) = 0$ . Таким образом, общими делителями данных многочленов могут быть лишь многочлены нулевой сте-

пени. Значит, и их НОД — многочлен нулевой степени, т. е.  $f(x)$  и  $g(x)$  взаимно просты.

Теперь, используя только что доказанную теорему, мы легко докажем, что многочлены  $f(x) = x - c_1$  и  $g(x) = x - c_2$ , где  $c_1 \neq c_2$ , взаимно просты.

В самом деле, равенство  $(x - c_1) + (-1)(x - c_2) = c_2 - c_1$  очевидно. Отсюда следует, что  $\frac{1}{c_2 - c_1} f(x) + \frac{-1}{c_2 - c_1} g(x) = 1$ , т. е. нашлись такие многочлены  $u(x) = \frac{1}{c_2 - c_1}$  и  $v(x) = \frac{-1}{c_2 - c_1}$ , что  $u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1$ . Значит,  $f(x)$  и  $g(x)$  взаимно просты.

А теперь установим некоторые свойства взаимно простых многочленов.

*Если многочлен  $f(x)$  взаимно прост с многочленами  $g(x)$  и  $h(x)$ , то  $f(x)$  взаимно прост и с их произведением  $g(x)h(x)$ .*

В самом деле, так как  $f(x)$  и  $g(x)$  взаимно просты, то существуют такие многочлены  $u_1(x)$  и  $v_1(x)$ , что

$$u_1(x)f(x) + v_1(x)g(x) = 1.$$

Аналогично из взаимной простоты многочленов  $f(x)$  и  $h(x)$  следует, что

$$u_2(x)f(x) + v_2(x)h(x) = 1$$

для некоторых многочленов  $u_2(x)$  и  $v_2(x)$ . Перемножим почленно полученные равенства:

$$(u_1(x)f(x) + v_1(x)g(x))(u_2(x)f(x) + v_2(x)h(x)) = 1.$$

После несложных преобразований имеем

$$(u_1(x)u_2(x)f(x) + u_1(x)v_2(x)h(x) + v_1(x)u_2(x)g(x))f(x) + (v_1(x)v_2(x))(g(x)h(x)) = 1,$$

т. е. нашлись такие многочлены  $u(x) = u_1(x)u_2(x)f(x) +$

$+ u_1(x)v_2(x)h(x) + v_1(x)u_2(x)g(x)$  и  $v(x) = v_1(x)v_2(x)$ ,  
 что  $u(x)f(x) + v(x)(g(x)h(x)) = 1$ . Значит, многочлены  
 $f(x)$  и  $g(x)h(x)$  взаимно просты.

Доказанное свойство нетрудно обобщить.

*Если многочлен  $f(x)$  взаимно прост с каждым из многочленов  $g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x)$ , то он взаимно прост и с их произведением  $g_1(x)g_2(x) \cdots g_n(x)$ .*

В самом деле, так как многочлен  $f(x)$  взаимно прост с  $g_1(x)$  и  $g_2(x)$ , то по только что доказанному свойству  $f(x)$  взаимно прост и с произведением  $g_1(x)g_2(x)$ . Теперь имеем, что  $f(x)$  взаимно прост с многочленами  $g_1(x)g_2(x)$  и  $g_3(x)$  а значит,  $f(x)$  взаимно прост и с их произведением  $g_1(x)g_2(x)g_3(x)$  и т. д. В конце таких рассуждений получим, что  $f(x)$  взаимно прост с  $g_1(x)g_2(x) \cdots g_n(x)$ .

Из только что доказанного непосредственно следует такое утверждение.

*Если многочлены  $f(x)$  и  $g(x)$  взаимно просты, то многочлены  $f^m(x)$  и  $g^n(x)$  также взаимно просты для любых натуральных чисел  $n$  и  $m$ .*

В самом деле, если  $g_1(x) = g_2(x) = \dots = g_n(x) = g(x)$ , то по уже доказанному свойству  $f(x)$  взаимно прост с  $g_1(x)g_2(x) \cdots g_n(x)$ , т. е. с  $g^n(x)$ . Далее,  $h(x) = g^n(x)$  взаимно прост с  $f(x)$ , а тогда  $h(x)$  взаимно прост с  $f^m(x)$ .

В дальнейшем нам понадобится сформулированное ниже свойство.

*Если  $f(x) : g(x)$ ,  $f(x) : h(x)$  и многочлены  $g(x)$  и  $h(x)$  взаимно просты, то  $f(x)$  делится и на их произведение.*

Действительно, из данных нам условий следует, что  $f(x) = g(x)s_1(x)$ ,  $f(x) = h(x)s_2(x)$  и  $u(x)g(x) + v(x)h(x) = 1$  для некоторых многочленов  $s_1(x)$ ,  $s_2(x)$ ,  $u(x)$ ,  $v(x)$ . Умножим обе части последнего равенства на  $f(x)$ . Получим  $u(x)g(x)f(x) + v(x)h(x)f(x) = f(x)$ . В первом слагаемом левой части этого равенства вместо  $f(x)$  подста-

вим равный ему многочлен  $h(x)s_2(x)$ , а во втором —  $g(x)s_1(x)$  и вынесем  $g(x)h(x)$  за скобки. В результате получим  $g(x)h(x)(u(x)s_2(x) + v(x)s_1(x)) = f(x)$ , откуда и следует делимость  $f(x)$  на  $g(x)h(x)$ .

Доказанное утверждение можно обобщить.

*Если  $f(x)$  делится на каждый из многочленов  $g_1(x)$ ,  $g_2(x)$ , ...,  $g_n(x)$  и эти многочлены попарно взаимно просты, то  $f(x)$  делится и на их произведение.*

Выражение «попарно взаимно просты» означает, что любые два многочлена  $g_i(x)$  и  $g_j(x)$ ,  $i \neq j$ , взаимно просты.

Докажем наше утверждение. Так как  $f(x) : g_1(x)$ ,  $f(x) : g_2(x)$ , а  $g_1(x)$  и  $g_2(x)$  взаимно просты, то из предыдущего свойства следует, что  $f(x) : (g_1(x)g_2(x))$ . Далее,  $g_3(x)$  взаимно прост с  $g_1(x)$  и  $g_2(x)$ . Значит, как мы доказали ранее,  $g_3(x)$  взаимно прост и с произведением  $g_1(x)g_2(x)$ . Имеем, что  $f(x) : (g_1(x)g_2(x))$ ,  $f(x) : g_3(x)$  и многочлены  $g_1(x)g_2(x)$  и  $g_3(x)$  взаимно просты, а значит,  $f(x)$  делится и на их произведение, т. е.  $f(x) : (g_1(x) \times g_2(x)g_3(x))$ . Рассуждая аналогично, мы через конечное число шагов получим, что  $f(x) : (g_1(x)g_2(x) \cdots g_n(x))$ .

## У п р а ж н е н и я

**101.** Пусть  $f(x)$  и  $g(x)$  — многочлены и  $d(x)$  — многочлен, для которого существуют такие многочлены  $u(x)$  и  $v(x)$ , что  $u(x)f(x) + v(x)g(x) = d(x)$ . Можно ли утверждать, что  $d(x)$  — НОД многочленов  $f(x)$  и  $g(x)$ ?

**102.** Пусть  $d(x)$  — НОД многочленов  $f(x)$  и  $g(x)$ ,  $s_1(x)$  и  $s_2(x)$  — частные при делении  $f(x)$  и  $g(x)$  на  $d(x)$  соответственно. Докажите, что многочлены  $s_1(x)$  и  $s_2(x)$  взаимно просты.

**103.** Пусть произведение  $f(x)g(x)$  делится на  $h(x)$ , многочлены  $f(x)$  и  $h(x)$  взаимно просты. Докажите, что  $g(x) : h(x)$ .

**104.** Пусть  $f(x)$  — произвольный многочлен, а  $g(x)$  — многочлен первой степени. Докажите, что либо  $f(x) : g(x)$ , либо  $f(x)$  и  $g(x)$  взаимно просты.



Познакомимся еще с одним понятием теории многочленов.

*Число  $c$  называется алгебраическим, если существует такой многочлен  $f(x)$  с рациональными коэффициентами, для которого  $c$  является корнем.*

Например, числа 5 и  $\sqrt{3}$  — алгебраические, так как они являются корнями многочленов  $f(x) = x - 5$  и  $g(x) = x^2 - 3$  соответственно и коэффициенты этих многочленов — рациональные числа. А вот число  $\pi$  алгебраическим не является. Другими словами, нет такого многочлена с рациональными коэффициентами, для которого  $\pi$  было бы корнем. Доказательство этого факта выходит за рамки наших возможностей и поэтому здесь не приводится.

В дальнейшем нам понадобится следующее утверждение.

*Пусть  $c$  — алгебраическое число,  $f(x)$  — многочлен с рациональными коэффициентами и  $f(c) \neq 0$ . Тогда существует такой многочлен  $p(x)$  с рациональными коэффициентами, что  $p(c) = 0$  и  $p(x)$  взаимно прост с  $f(x)$ .*

Докажем это утверждение, указав способ отыскания многочлена  $p(x)$ .

Так как  $c$  — алгебраическое число, то существует многочлен  $g(x)$  с рациональными коэффициентами, для которого  $c$  является корнем. Тогда НОД многочленов  $f(x)$  и  $g(x)$ , найденный с помощью алгоритма Евклида, также имеет рациональные коэффициенты. Обозначим этот НОД через  $d(x)$ . Если ст.  $d(x) = 0$ , то  $f(x)$  и  $g(x)$  взаимно просты, и теорема доказана.

Пусть ст.  $d(x) > 0$ . Разделим  $g(x)$  на  $d(x)$ . Получим  $g(x) = d(x)g_1(x)$ . Ясно, что ст.  $g(x) > \text{ст. } g_1(x)$ . Так как  $g(c) = 0$ , то  $d(c)g_1(c) = 0$ . Значит, либо  $d(c) = 0$ , либо  $g_1(c) = 0$ . Если предположить, что  $d(c) = 0$ , то из делимости  $f(x)$  на  $d(x)$  следует, что  $f(c) = 0$ , а это противоре-

чит условию нашего утверждения. Значит,  $g_1(c) = 0$ . Кроме этого,  $g_1(x)$  — многочлен с рациональными коэффициентами, ибо такими являются  $g(x)$  и  $d(x)$ .

Применим теперь к многочленам  $f(x)$  и  $g_1(x)$  те же рассуждения, что и к  $f(x)$  и  $g(x)$ . Обозначим через  $d_1(x)$  НОД многочленов  $f(x)$  и  $g_1(x)$ , коэффициенты которого — рациональные числа. Если ст.  $d_1(x) = 0$ , то  $f(x)$  и  $g_1(x)$  взаимно просты, и тогда  $g_1(x)$  — искомый многочлен. Если же ст.  $d_1(x) > 0$ , то, разделив  $g_1(x)$  на  $d_1(x)$ , получим  $g_1(x) = d_1(x)g_2(x)$ . Так как ст.  $d_1(x) > 0$ , то ст.  $g_1(x) > \text{ст. } g_2(x)$ . Так же, как и для  $g_1(x)$ , устанавливаем, что  $g_2(x)$  — многочлен с рациональными коэффициентами и  $g_2(c) = 0$ .

К многочленам  $f(x)$  и  $g_2(x)$  применим те же рассуждения, которые мы применяли выше к  $f(x)$  и  $g(x)$ , т. е. обозначим через  $d_2(x)$  НОД многочленов  $f(x)$  и  $g_2(x)$ , коэффициенты которого — рациональные числа и т. д.

Осталось показать, что через конечное число шагов получится такой взаимно простой с  $f(x)$  многочлен  $g_h(x)$  с рациональными коэффициентами, что  $g_h(c) = 0$ .

В самом деле, для степеней многочленов  $g(x)$ ,  $g_1(x)$ ,  $g_2(x)$ , ... имеют место соотношения: ст.  $g(x) > \text{ст. } g_1(x) > \text{ст. } g_2(x) > \dots$  и, кроме этого,  $g_1(c) = g_2(c) = \dots = 0$ . Значит, на каком-то шаге мы получим многочлен  $g_h(x)$  степени 1. А тогда ст.  $d_h(x) \leq 1$ , т. е. либо ст.  $d_h(x) = 1$ , либо ст.  $d_h(x) = 0$ . Если допустить, что ст.  $d_h(x) = 1$  то из делимости  $g_h(x)$  на  $d_h(x)$  следует, что  $g_h(x) = ad_h(x)$ . Тогда из  $f(x) : d_h(x)$  следует  $f(x) : g_h(x)$ , а в этом случае  $f(c) = 0$ , что невозможно. Значит, ст.  $d_h(x) = 0$ , т. е.  $f(x)$  и  $g_h(x)$  взаимно просты.

### Упражнения

105. Докажите, что следующие числа являются алгебраическими:

- а)  $\sqrt[3]{2}$ ; б)  $\sqrt[3]{5}$ ; в)  $\sqrt[3]{1 - \sqrt{2}}$ ; г)  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ .

**106.** Пусть  $c$  — алгебраическое число и  $p(x)$  — многочлен с рациональными коэффициентами самой малой степени среди тех, для которых  $c$  является корнем. Докажите, что если:

а)  $f(x)$  — произвольный многочлен с рациональными коэффициентами, для которого  $c$  является корнем, то  $f(x) : p(x)$ ;

б)  $f(x)$  — такой многочлен с рациональными коэффициентами, что  $f(c) \neq 0$ , то  $f(x)$  и  $p(x)$  взаимно просты.

## ОСВОБОЖДЕНИЕ ОТ ИРРАЦИОНАЛЬНОСТИ В ЗНАМЕНАТЕЛЕ ДРОБИ

Напомним, что избавиться от иррациональности в знаменателе дроби — значит так преобразовать эту дробь, чтобы в полученной равной ей дроби знаменатель не содержал корней. В простейших случаях сделать это нетрудно. Например, для дроби  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  от иррациональности в знаменателе можно легко освободиться следующим образом:  $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . А вот избавиться от

иррациональности в знаменателе дроби  $\frac{1}{\sqrt[3]{4} + 7\sqrt[3]{2} + 5}$ , используя знания, полученные в школе, вряд ли удастся. Применим теорию многочленов для решения задач такого рода, доказав вначале следующее утверждение.

*Пусть  $c$  — алгебраическое число и  $f(x)$  — многочлен с рациональными коэффициентами, для которого  $c$  не является корнем. Тогда существует такой многочлен  $u(x)$  с рациональными коэффициентами, что  $1/f(c) = u(c)$ .*

Прежде чем приступить к доказательству этого утверждения, выясним на примере, что оно нам дает. Пусть алгебраическое число  $c = \sqrt[3]{2}$ , а  $f(x) = x^2 + 7x + 5$ . Тогда  $f(c) = \sqrt[3]{4} + 7\sqrt[3]{2} + 5$  и  $\frac{1}{f(c)} = \frac{1}{\sqrt[3]{4} + 7\sqrt[3]{2} + 5}$ .

(Обратите внимание, что получена дробь, об освобождении от иррациональности в знаменателе которой мы говорили несколько ранее.) Так вот, в нашем утверждении говорится о существовании такого многочлена  $u(x)$  с рациональными коэффициентами, что  $1/f(c) = u(c)$ . Если мы положим  $u(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ , то получим

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4} + 7\sqrt[3]{2} + 5} = a_n \sqrt[3]{2^n} + \dots + a_1 \sqrt[3]{2} + a_0. \text{ Как ви-}$$

дим, из сформулированного утверждения следует, что избавиться от иррациональности в знаменателе рассматриваемой дроби можно, для этого нужно лишь найти многочлен  $u(x)$ . Доказательство утверждения и состоит в том, что указывается способ отыскания нужного нам многочлена  $u(x)$ .

Итак, приступаем к доказательству теоремы. Так как  $c$  — алгебраическое число,  $f(x)$  — многочлен с рациональными коэффициентами и  $f(c) \neq 0$ , то, как мы доказали чуть раньше, существует такой многочлен  $p(x)$  с рациональными коэффициентами, что  $p(c) = 0$  и  $p(x)$  взаимно прост с  $f(x)$ . Тогда, как известно, существуют такие многочлены  $u(x)$  и  $v(x)$  с рациональными же коэффициентами, что  $u(x)f(x) + v(x)p(x) = 1$ . Положим в этом равенстве  $x = c$ . С учетом того, что  $p(c) = 0$ , получим  $u(c)f(c) = 1$ . Тогда  $\frac{1}{f(c)} = \frac{u(c)}{u(c)f(c)} = \frac{u(c)}{1} u(c)$ , и теорема доказана.

Теперь, используя доказанную теорему, избавимся от иррациональности в знаменателе дроби  $\frac{1}{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 3}$ .

Для этого надо подобрать такое алгебраическое число  $c$  и многочлен  $f(x)$  с рациональными коэффициентами, чтобы данная дробь равнялась  $1/f(c)$ . Нетрудно заметить, что нужно положить  $c = \sqrt[3]{2}$ , а тогда  $f(x) = x^2 - x + 3$ . Далее, нам необходимо найти такой многочлен  $p(x)$  с ра-

циональными коэффициентами, который взаимно прост с  $f(x)$  и  $p(c) = 0$ . Способ отыскания такого многочлена мы указали при доказательстве теоремы на с. 88. Согласно предложенному там способу, сначала нужно взять любой многочлен с рациональными коэффициентами, для которого  $c = \sqrt[3]{2}$  является корнем. Таким многочленом, как легко заметить, является многочлен  $x^3 - 2$  (может, конечно, случиться, что он уже взаимно прост с  $f(x)$ ). Обозначим этот многочлен через  $p(x)$ , т. е.  $p(x) = x^3 - 2$ . Найдем теперь НОД многочленов  $p(x)$  и  $f(x)$ , используя алгоритм Евклида:

$$\begin{array}{rcl}
 p(x) \rightarrow & \begin{array}{r} x^3 \phantom{- 2} \\ \underline{x^3 - x^2 + 3x} \\ -x^2 - 3x - 2 \\ \underline{x^2 - x + 3} \\ -2x - 5 \end{array} & \left| \begin{array}{l} x^2 - x + 3 \leftarrow f(x) \\ \underline{x + 1} \leftarrow s_1(x) \end{array} \right. \\
 & & \leftarrow r_1(x)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 f(x) \rightarrow & \begin{array}{r} x^2 - x + 3 \\ \underline{x^2 + \frac{5}{2}x} \\ -\frac{7}{2}x + 3 \\ \underline{-\frac{7}{2}x - \frac{35}{4}} \\ \frac{47}{4} \end{array} & \left| \begin{array}{l} -2x - 5 \leftarrow r_1(x) \\ \underline{-\frac{1}{2}x + \frac{7}{4}} \leftarrow s_2(x) \end{array} \right. \\
 & & \leftarrow r_2(x)
 \end{array}$$

Так как  $r_2(x) = 47/4$ , то на следующем шаге, при делении  $r_1(x)$  на  $r_2(x)$ , мы получим нулевой остаток, и процесс последовательного деления оборвется. Значит, последний, отличный от нуля остаток, т. е. НОД,— это  $r_2(x) = 47/4$ .

Таким образом, многочлены  $f(x)$  и  $p(x)$  взаимно просты, т. е. нужный многочлен  $p(x)$  найден. Теперь необходимо найти линейное представление наибольшего общего делителя многочленов  $f(x)$  и  $p(x)$ , т. е. определить многочлены  $u(x)$  и  $v(x)$ . Для этого запишем последовательность Евклида:

$$p(x) = f(x)(x+1) + r_1(x),$$

$$f(x) = r_1(x)\left(-\frac{1}{2}x + \frac{7}{4}\right) + \frac{47}{4}.$$

Равенство  $r_1(x) = r_2(x)s_3(x)$  нам не нужно, и мы его не записываем. Для упрощения преобразований умножим обе части последнего равенства на 4, а первое оставим без изменений. Получим:

$$p(x) = f(x)(x+1) + r_1(x),$$

$$4f(x) = r_1(x)(-2x+7) + 47.$$

Напомним, что нам необходимо найти линейное представление НОД многочленов  $f(x)$  и  $p(x)$ . Но так как  $\frac{47}{4}$  — их НОД, то  $4 \cdot \frac{47}{4} = 47$  — тоже НОД. Чтобы избежать громоздких вычислений, найдем линейное представление последнего НОД:

$$47 = (-2x^2 + 5x + 11)f(x) + (2x - 7)p(x).$$

Положим в этом равенстве  $x = \sqrt[3]{2}$ . С учетом соотношения  $p(\sqrt[3]{2}) = 0$  получим  $(-2\sqrt[3]{4} + 5\sqrt[3]{2} + 11)f(\sqrt[3]{2}) = 47$  или  $(-2\sqrt[3]{4} + 5\sqrt[3]{2} + 11)(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 3) = 47$ . Тогда

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 3} = \frac{-2\sqrt[3]{4} + 5\sqrt[3]{2} + 11}{(-2\sqrt[3]{4} + 5\sqrt[3]{2} + 11)(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 3)} =$$

$$= \frac{-2\sqrt[3]{4} + 5\sqrt[3]{2} + 11}{47},$$

т. е. мы избавились от иррациональности в знаменателе рассматриваемой дроби.

## Упражнения

107. Освободитесь от иррациональности в знаменателе следующих дробей:

а)  $\frac{4}{2\sqrt[3]{25} - 3\sqrt[3]{5} + 3};$

б)  $\frac{1}{\sqrt[4]{27} + 2\sqrt[4]{9} + \sqrt[4]{3} + 1};$

в)  $\frac{1}{1 - \sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{2}};$

г)  $\frac{1}{1 + \sqrt[4]{2} - \sqrt[4]{2}};$

д)  $\frac{1}{\sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{3} + 1}.$

## МНОГОЧЛЕНЫ И КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

### МНОГОЧЛЕНЫ С КОМПЛЕКСНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Напомним, что многочленом мы назвали выражение вида  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ , где  $n$  — натуральное число;  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$  — любые числа. Значит, вообще говоря, они могут быть и комплексными. Так, например,  $f(x) = (1 - i)x^3 + ix^2 + 3 - i$  — многочлен.

Можно рассматривать и значения многочленов при комплексном значении переменной. Например, если  $f(x) = x^3 + 3$ , то  $f(i) = 3 - i$ ; если  $f(x) = x^2 + 2 + 3i$ , то  $f(i) = 1 + 3i$  и т. д. В частности, комплексное число может быть и корнем многочлена. Например, если  $f(x) = x^2 + 1$ , то  $x = i$  и  $x = -i$  — корни этого многочлена.

Для многочленов мы ввели целый ряд понятий и доказали достаточно много теорем. В некоторых из них налагались какие-то ограничения на коэффициенты. Например, теоремы о рациональных корнях многочлена применимы лишь к многочленам с целыми коэффициентами. А вот те теоремы, где на коэффициенты не налагались ограничения такого рода, справедливы для многочленов с любыми комплексными коэффициентами.

Обратим внимание еще и на такую деталь. Если  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ , то его производной мы назвали многочлен  $f'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) \times a_{n-1} x^{n-2} + \dots + 2 a_2 x + a_1$ . Это определение годится и для того случая, когда коэффициенты многочлена — комплексные числа. Однако если  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$  —



действительные числа, то, рассматривая данный многочлен как функцию  $y = f(x)$ , определенную на множестве действительных чисел, мы замечаем, что производная многочлена — это производная функции  $y = f(x)$ . Но переменная  $x$  может принимать и комплексные значения. В этом случае можно рассматривать многочлен  $f(x)$  как функцию  $y = f(x)$ , определенную на множестве комплексных чисел, но для этой функции известное нам понятие производной не годится. Вот почему мы и не могли воспользоваться этим понятием при определении производной многочлена.

## У п р а ж н е н и я

108. Найдите степень многочлена  $f(x) = (a^2 + 1)x^2 + (a - i)x + 5$ .
109. Пусть  $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$ . Найдите  $f(i)$ ,  $f(1 - i)$ ,  $f(2 + 3i)$ .
110. Пусть  $f(x) = (1 - i)x^2 + ix + 2 - 3i$ . Найдите  $f(1)$ ,  $f(0)$ ,  $f(2)$ ,  $f(2 - i)$ .
111. Найдите остаток при делении  $f(x) = x^{17} - x^{10} + 2x^3 - 1$  на  $x^2 + 1$ .
112. По схеме Горнера разделите с остатком  $f(x) = x^3 + x^2 - 7$  на  $x + 4 - i$ .
113. Укажите многочлен  $f(x)$ , для которого числа  $-2$ ,  $i$ ,  $3$ ,  $3 - 2i$  являются корнями кратности 1, 2, 3, 3 соответственно.
114. Найдите производную многочлена  $f(x) = ix^3 + (1 - 2i)x^2 + 5x - 3$ .
115. Разложите многочлен  $f(x) = 2x^2 - ix + 3$  по степеням  $x - i$ .
116. Докажите, что следующие числа являются алгебраическими:  $i$ ,  $1 + i$ ,  $-1 + i\sqrt{5}$ .

## ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АЛГЕБРЫ

Представьте себе, что мы не знаем о существовании комплексных чисел. Тогда можно рассматривать лишь многочлены с действительными коэффициентами и только действительные корни этих многочленов. А в этом случае нас ожидает одна «неприятность»: не всякий многочлен

имеет корни. Например, многочлен  $f(x) = x^2 + 1$  не имеет действительных корней.

Существование комплексных чисел позволяет избежать подобной неприятности, поскольку верна теорема, которую мы сейчас сформулируем.

*Всякий многочлен степени  $n \geq 1$  имеет хотя бы один комплексный корень.*

Это утверждение называется *основной теоремой алгебры*. Уже из названия понятна ее значимость, в частности, для теории многочленов. Существует много различных доказательств этой теоремы, однако все они используют сведения, выходящие далеко за рамки данной книги, и поэтому мы примем ее без доказательства. Отметим лишь, что первое строгое доказательство основной теоремы алгебры дал великий немецкий математик Карл Фридрих Гаусс (1777—1855) и поэтому ее иногда называют *теоремой Гаусса*.

Из основной теоремы алгебры вытекает ряд интересных следствий. Укажем некоторые из них.

*Пусть  $f(x)$  — многочлен степени  $n \geq 1$ ,  $c_1, c_2, \dots, c_m$  — все его различные корни кратностей  $k_1, k_2, \dots, k_m$  соответственно. Тогда  $f(x) = a_n (x - c_1)^{k_1} (x - c_2)^{k_2} \dots (x - c_m)^{k_m}$  где  $a_n$  — старший коэффициент многочлена  $f(x)$ .*

В самом деле, из условий этого утверждения следует, что  $f(x)$  делится на каждый из многочленов  $(x - c_1)^{k_1}, (x - c_2)^{k_2}, \dots, (x - c_m)^{k_m}$ . Рассмотрим два двучлена  $x - c_i$  и  $x - c_j$ ,  $i \neq j$ ,  $1 \leq i \leq m$ ,  $1 \leq j \leq m$ . Ранее мы показали, что эти двучлены взаимно просты. А тогда, как следует из свойств взаимно простых многочленов,  $(x - c_i)^{k_i}$  и  $(x - c_j)^{k_j}$  тоже взаимно просты. Таким образом, многочлены  $(x - c_1)^{k_1}, (x - c_2)^{k_2}, \dots, (x - c_m)^{k_m}$  попарно взаимно просты и  $f(x)$  делится на каждый из них. А тогда, как известно,  $f(x)$  делится и на их произведение. Значит,

$f(x) = (x - c_1)^{k_1} (x - c_2)^{k_2} \dots (x - c_m)^{k_m} s(x)$  для некоторого многочлена  $s(x)$ . Если предположить, что  $\text{ст.} s(x) > 0$ , то по основной теореме алгебры  $s(x)$  имеет хотя бы один корень. Ясно, что этот корень является и корнем многочлена  $f(x)$ , т. е. совпадает с одним из чисел  $c_1, c_2, \dots, c_m$  — это ведь все корни многочлена  $f(x)$ . Пусть для определенности  $c_1$  — корень  $s(x)$ . Тогда  $s(x)$  делится на  $x - c_1$ , а значит,  $f(x)$  делится на  $(x - c_1)^{k_1+1}$ . Но  $c_1$  — корень кратности  $k_1$  для многочлена  $f(x)$ , т. е.  $f(x)$  не делится на  $(x - c_1)^{k_1+1}$ . Пришли к противоречию. Значит,  $\text{ст.} s(x) = 0$ , т. е.  $s(x)$  — это число. Пусть  $s(x) = a$ . Тогда  $f(x) = a(x - c_1)^{k_1} (x - c_2)^{k_2} \dots (x - c_m)^{k_m}$ . Осталось найти число  $a$ . Пусть  $a_n$  — старший коэффициент многочлена  $f(x)$ . Так как старший коэффициент произведения равен произведению старших коэффициентов сомножителей, то старший коэффициент многочлена  $a(x - c_1)^{k_1} \times \dots \times (x - c_2)^{k_2} \dots (x - c_m)^{k_m}$  равен  $a \cdot 1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1 = a$ . Значит,  $a = a_n$ , и утверждение доказано.

Уже доказывалось, что многочлен  $n$ -й степени имеет не более, чем  $n$  корней. Сейчас можно существенно уточнить этот результат.

*Всякий многочлен  $f(x)$  степени  $n \geq 1$  имеет ровно  $n$  корней, если каждый корень считать столько раз, какова его кратность.*

В самом деле, пусть  $c_1, c_2, \dots, c_m$  — все различные корни многочлена  $f(x)$  кратностей  $k_1, k_2, \dots, k_m$  соответственно. Сначала выясним, что означают слова «каждый корень считать столько раз, какова его кратность». Корень  $c_1$ , например, имеет кратность  $k_1$ . Так вот, будем считать, что  $f(x)$  имеет  $k_1$  корней, каждый из которых равен  $c_1$ . Аналогично  $f(x)$  имеет  $k_2$  корней, каждый из которых равен  $c_2$  и т. д. При таком подсчете  $f(x)$  имеет  $k_1 + k_2 + \dots + k_m$  корней. Значит, нужно доказать, что  $n = k_1 + k_2 + \dots + k_m$ , а это уже сделать просто. С од-

ной стороны,  $\text{ст.} f(x) = n$ . С другой стороны, из  $f(x) = a_n(x-c_1)^{k_1}(x-c_2)^{k_2} \dots (x-c_m)^{k_m}$  следует, что  $\text{ст.} f(x) = \text{ст.} a_n + \text{ст.} (x-c_1)^{k_1} + \text{ст.} (x-c_2)^{k_2} + \dots + \text{ст.} (x-c_m)^{k_m} = k_1 + k_2 + \dots + k_m$ , и сформулированное утверждение доказано.

Итак, всякий многочлен степени  $n \geq 1$  представим в виде  $f(x) = a_n(x-c_1)^{k_1}(x-c_2)^{k_2} \dots (x-c_m)^{k_m}$ . Если в этом представлении мы каждую степень запишем в виде произведения, т. е., например,

$$(x-c_1)^{k_1} = \underbrace{(x-c_1)(x-c_1) \dots (x-c_1)}_{k_1},$$

то придем к утверждению, которое сейчас и будет сформулировано.

*Всякий многочлен степени  $n \geq 1$  раскладывается в произведение  $n$  линейных сомножителей с комплексными коэффициентами.*

Мы здесь не упомянули о сомножителе  $a_n$ , ибо рассматриваем  $a_n(x-c_1)$  как один сомножитель первой степени.

## У п р а ж н е н и я

**117.** Пусть  $f(x)$  и  $g(x)$  — многочлены. Докажите, что  $f(x)$  делится на  $g(x)$  тогда и только тогда, когда каждый корень многочлена  $g(x)$  является также корнем многочлена  $f(x)$  и кратность этого корня для  $g(x)$  не выше, чем для  $f(x)$ .

**118.** Найдите многочлен  $f(x)$ , если  $f(x) : f'(x)$ .

**119.** Найдите многочлен  $f(x)$ , если  $f(x) = f'(x)f''(x)$ .

**120.** Разложите многочлен  $f(x)$  на линейные множители, если:

а)  $f(x) = x^2 + 1$ ;

б)  $f(x) = x^4 - 1$ ;

в)  $f(x) = x^3 + 1$ ;

г)  $f(x) = x^8 + 4x^6 - 64x^2 - 256$ .

## ФОРМУЛЫ ВЬЕТА \*

Из школьного курса математики известны формулы Виета для многочленов второй степени. Оказывается, аналогичные соотношения существуют между корнями и коэффициентами любого многочлена. Установим эти соотношения, которые тоже называются *формулами Виета*. Сначала напомним, как они выводились для квадратного трехчлена.

Пусть  $f(x) = ax^2 + bx + c$  и  $c_1, c_2$  — корни этого многочлена. Тогда  $f(x) = a(x - c_1)(x - c_2) = ax^2 - a(c_1 + c_2)x + ac_1c_2$ . Таким образом,  $ax^2 + bx + c = ax^2 - a(c_1 + c_2)x + ac_1c_2$  и отсюда следует, что  $b = -a(c_1 + c_2)$ ,  $c = ac_1c_2$ .

Точно также выводятся формулы Виета и в общем случае. Пусть

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + a_{n-3} x^{n-3} + \dots + a_0$ . Известно, что этот многочлен имеет  $n$  корней с учетом их кратности. Пусть  $c_1, c_2, \dots, c_n$  — все корни многочлена  $f(x)$ , причем каждый из них записан столько раз, какова его кратность. Тогда  $f(x) = a_n(x - c_1)(x - c_2)(x - c_3) \dots (x - c_n)$ . Раскроем скобки и приведем подобные члены. В результате получим

$$\begin{aligned} f(x) = & a_n x^n - a_n(c_1 + c_2 + \dots + c_n)x^{n-1} + \\ & + a_n(c_1c_2 + c_1c_3 + \dots + c_{n-1}c_n)x^{n-2} - \\ & - a_n(c_1c_2c_3 + c_1c_2c_4 + \dots + c_{n-2}c_{n-1}c_n)x^{n-3} + \\ & + \dots + (-1)^n a_n c_1 c_2 \dots c_n. \end{aligned}$$

Таким образом, мы имеем два представления многочлена  $f(x)$ , а значит, соответствующие коэффициенты этих представлений равны, т. е.:

$$a_{n-1} = -a_n(c_1 + c_2 + \dots + c_n),$$

---

\* Виет Франсуа (1540—1603) — французский математик.

[illegible]

В частности, для многочлена третьей степени  $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$  имеем:

$$\begin{aligned} a_2 &= -a_3(c_1 + c_2 + c_3), \\ a_1 &= a_3(c_1c_2 + c_1c_3 + c_2c_3), \\ a_0 &= -a_3c_1c_2c_3. \end{aligned}$$

Для многочлена четвертой степени  $f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$  с корнями  $c_1, c_2, c_3, c_4$  формулы Виета выглядят так:

$$\begin{aligned} a_3 &= -a_4(c_1 + c_2 + c_3 + c_4), \\ a_2 &= a_4(c_1c_2 + c_1c_3 + c_1c_4 + c_2c_3 + c_2c_4 + c_3c_4), \\ a_1 &= -a_4(c_1c_2c_3 + c_1c_2c_4 + c_1c_3c_4 + c_2c_3c_4), \\ a_0 &= a_4c_1c_2c_3c_4. \end{aligned}$$

Формулы Виета позволяют решить ряд интересных задач. Например, найдем сумму квадратов корней многочлена  $f(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 4$ . Конечно, можно найти корни этого многочлена, а затем и сумму их квадратов. Но, как мы уже отмечали, найти корни многочлена — это, вообще говоря, задача довольно сложная. Попробуем обойтись без ее решения.

Степень нашего многочлена равна 3, а значит, он имеет три корня с учетом их кратности. Обозначим эти корни через  $c_1, c_2, c_3$ . Таким образом, нужно найти  $c_1^2 + c_2^2 + c_3^2$ . По формулам Виета имеем:

$$-1 = -2(c_1 + c_2 + c_3),$$

$$3 = 2(c_1c_2 + c_1c_3 + c_2c_3).$$

Возведем обе части первого равенства в квадрат. Получим  $1 = 4((c_1^2 + c_2^2 + c_3^2) + 2(c_1c_2 + c_1c_3 + c_2c_3))$ . Используя вторую из формул Виета для данного многочлена, находим  $1 = 4((c_1^2 + c_2^2 + c_3^2) + 3)$ . Отсюда  $c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = -11/4$ .

## У п р а ж н е н и я

121. Пусть  $c_1$  и  $c_2$  — корни квадратного трехчлена  $f(x) = ax^2 + bx + c$ . Найдите:

а)  $c_1^2 + c_2^2$ ;    б)  $\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}$ ;    в)  $\frac{c_1}{c_2} + \frac{c_2}{c_1}$ ;

г)  $\frac{1}{c_1^2} + \frac{1}{c_2^2}$ ;    д)  $c_1^3 + c_2^3$ .

122. Найдите число  $r$ , если:

а) один из корней многочлена  $f(x) = x^3 - 21x + r$  равен удвоенному другому;

б) сумма двух корней многочлена  $f(x) = x^3 + 12x^2 + r$  равна третьему корню;

в) произведение двух корней многочлена  $f(x) = x^3 - 20x + r$  равно третьему корню.

123. Найдите неизвестный коэффициент многочлена  $f(x)$  и его корни при условии, что они образуют арифметическую прогрессию:

а)  $f(x) = x^3 + 6x^2 + 5x + r$ ;    б)  $f(x) = x^3 - 18x^2 + qx + 24$ .

124. Для многочлена  $f(x) = x^3 + px^2 - 6x + 8$  найдите значение параметра  $p$  и его корни, если известно, что они образуют геометрическую прогрессию.

125. Сумма квадратов корней многочлена  $f(x) = x^2 - 3ax + a^2$  равна 1,75. Найдите  $a$ .

126. Докажите, что не все корни многочлена  $f(x)$  являются действительными числами, если:

а)  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + 9$ ;    б)  $f(x) = x^3 + 7x^2 + 25x + 1$ .

127. Пусть  $f(x) = x^2 + px + q$ . Найдите квадратный трехчлен

$g(x)$  со старшим коэффициентом, равным 1, корни которого есть числа:

- а) противоположные корням многочлена  $f(x)$ ;
- б) обратные корням многочлена  $f(x)$ ;
- в) в два раза большие корней многочлена  $f(x)$ .

128. Пусть  $c_1, c_2, c_3$  — корни многочлена  $f(x) = x^3 - 2x - 5$ . Найдите многочлен  $g(x)$  третьей степени со старшим коэффициентом 1, корни которого есть числа  $k_1 = c_1c_2, k_2 = c_1c_3, k_3 = c_2c_3$ .

129. Пусть  $c_1$  и  $c_2$  — корни многочлена  $g(x) = x^2 + ax + b$  с целыми коэффициентами. Докажите, что если  $f(x)$  — произвольный многочлен с целыми коэффициентами, то  $f(c_1) + f(c_2)$  — целое число.

130. Пусть  $f(x)$  — многочлен с целыми коэффициентами. Докажите, что при любых целых  $a$  и  $b$  число  $f(a + \sqrt{b}) + f(a - \sqrt{b})$  — целое.

131. Докажите, что если числа  $a, b, c$  связаны равенством  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$ , то какие-либо два из них взаимно противоположны.

## РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

Из формул Виета следует, что любые два числа  $a$  и  $b$  являются корнями квадратного уравнения  $x^2 + px + q = 0$ , где  $p = -(a + b)$ ;  $q = ab$ . Это следствие позволяет довольно просто решать некоторые системы уравнений. Прежде чем показать, как это делается, введем одно новое понятие.

Рассмотрим уравнение  $x^2 + 3xy + y^2 = 0$  с двумя неизвестными  $x$  и  $y$ . Заменим в нем  $x$  на  $y$ , а  $y$  на  $x$ . Получим уравнение  $y^2 + 3yx + x^2 = 0$ . Видим, что уравнение точно такое же, как исходное, т. е. в результате произведенной замены уравнение не изменилось. Это наблюдение приводит нас к понятию симметрического уравнения.

*Уравнение с двумя неизвестными  $x$  и  $y$  называется симметрическим, если оно не изменяется при замене  $x$  на  $y$ , а  $y$  на  $x$ .*

Таким образом, рассмотренное выше уравнение — симметрическое. А вот уравнение  $x + y^2 = 0$  симметри-



ческим не является, так как при этой замене получим другое уравнение:  $y + x^2 = 0$ .

*Система уравнений с двумя неизвестными  $x$  и  $y$  называется симметрической, если каждое уравнение этой системы является симметрическим.*

Метод решения систем, который мы сейчас рассмотрим, применим лишь к симметрическим системам.

Решим, например, систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} x + y &= -4, \\ xy &= 3. \end{aligned} \right\}$$

Всякая пара чисел  $x$  и  $y$ , которая является решением этой системы, будет парой корней квадратного уравнения  $t^2 + pt + q = 0$ , где  $p = -(x + y)$ ;  $q = xy$ . Значит, решение системы — пара корней уравнения  $t^2 + 4t + 3 = 0$ . Корнями же этого уравнения являются числа  $t_1 = 1$ ,  $t_2 = 3$ . Следовательно,  $x = 1$ ,  $y = 3$  и  $x = 3$ ,  $y = 1$  — решения рассматриваемой системы уравнений.

Найдем теперь действительные решения системы

$$\left. \begin{aligned} x + y &= 3, \\ x^4 + y^4 &= 17. \end{aligned} \right\}$$

(Заметим, что если первую систему еще можно было решить методом подстановки, то для последней этот метод мало пригоден, так как в результате подстановки получится уравнение четвертой степени.)

Рассматриваем решение  $x$  и  $y$  исходной системы как пару корней квадратного уравнения  $t^2 + pt + q = 0$ , где  $p = -(x + y)$ ;  $q = xy$ . Из системы следует, что  $p = -3$ . Осталось найти  $q$ . Для этого преобразуем второе уравнение системы следующим образом:  $x^4 + y^4 = (x^4 + 2x^2y^2 + y^4) - 2x^2y^2 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = [(x^2 + 2xy + y^2) - 2xy]^2 - 2x^2y^2 = [(x + y)^2 - 2xy]^2 - 2x^2y^2$ . Учитывая,

что  $x + y = -p$ , а  $xy = q$ , получаем  $x^4 + y^4 = (p^2 - 2q)^2 - 2q^2$ . Но  $p = -3$ , а тогда  $x^4 + y^4 = (9 - 2q)^2 - 2q^2 = 2q^2 - 36q + 81$ . Так как  $x^4 + y^4 = 17$ , то  $2q^2 - 36q + 81 = 17$ , т. е.  $q^2 - 18q + 32 = 0$ . Отсюда получаем, что  $q_1 = 2$ ,  $q_2 = 16$ .

Таким образом, чтобы отыскать решения системы, нужно найти пары решений квадратных уравнений  $t^2 - 3t + 2 = 0$  и  $t^2 - 3t + 16 = 0$ . Корни первого уравнения:  $t_1 = 1$ ,  $t_2 = 2$ , а второе действительных корней не имеет (мы ведь ищем действительные решения системы). Значит,  $x = 1$ ,  $y = 2$  и  $x = 2$ ,  $y = 1$  — решения исходной системы.

К симметрическим системам можно свести некоторые иррациональные уравнения. Рассмотрим, например, уравнение  $\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{97 - x} = 5$ . Найдем его действительные корни. Для этого введем два вспомогательных неизвестных  $u$  и  $v$ , положив  $u = \sqrt[4]{x}$ ,  $v = \sqrt[4]{97 - x}$ . Тогда заданное уравнение принимает вид  $u + v = 5$ . Кроме того, имеем  $u^4 + v^4 = x + 97 - x = 97$  и получаем следующую систему уравнений с неизвестными  $u$  и  $v$ :

$$\left. \begin{aligned} u + v &= 5, \\ u^4 + v^4 &= 97. \end{aligned} \right\}$$

Такие системы вы решать умеете и поэтому легко получите, что  $u = 3$ ,  $v = 2$  или  $u = 2$ ,  $v = 3$ . Отсюда следует, что  $\sqrt[4]{x} = 3$  или  $\sqrt[4]{x} = 2$ . Тогда для исходного уравнения находим два корня:  $x_1 = 81$  и  $x_2 = 16$ .

## Упражнения

132. Найдите действительные решения следующих систем уравнений:

а)  $\begin{cases} x^2 + y^2 + 4xy = -11, \\ x + y - 2xy = 13; \end{cases}$

б)  $\begin{cases} 2(x + y) = 5xy, \\ 8(x^3 + y^3) = 65; \end{cases}$

$$\begin{array}{ll}
 \text{в)} \begin{cases} x^4 + y^4 + x^2 y^2 = 91, \\ x^2 - xy + y^2 = 7; \end{cases} & \text{г)} \begin{cases} x^2 + y^2 + x^2 y^2 + xy(x+y+2) = 3, \\ \frac{x+y}{xy} + x - \frac{x^2}{x+y} = -\frac{5}{2}; \end{cases} \\
 \text{д)} \begin{cases} (x^2 + 1)(y^2 + 1) = 10, \\ (x+y)(xy-1) = 3; \end{cases} & \text{е)} \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = \frac{5}{6}\sqrt{xy}, \\ x+y = 13; \end{cases} \\
 \text{ж)} \begin{cases} x-y = \frac{7}{2}(\sqrt[3]{x^2 y} - \\ -\sqrt[3]{x y^2}), \\ \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = 3; \end{cases} & \text{з)} \begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{7}{\sqrt{xy}} + 1, \\ \sqrt{x^3 y} + \sqrt{y^3 x} = 78. \end{cases}
 \end{array}$$

133. Решите следующие уравнения в действительных числах:

$$\begin{array}{ll}
 \text{а)} \sqrt[3]{7+x} + \sqrt[3]{28-x} = 5; & \text{б)} x + \sqrt{17-x^2} + x\sqrt{17-x^2} = 9; \\
 \text{в)} x\sqrt[3]{35-x^3} (x + \sqrt[3]{35-x^3}) = 30; & \\
 \text{г)} \sqrt[4]{65+x} + \sqrt[4]{17-x} = 4. &
 \end{array}$$

### КОРНИ МНОГОЧЛЕНОВ С ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Будем рассматривать теперь только многочлены с действительными коэффициентами. Докажем одно утверждение, играющее важную роль в теории таких многочленов.

*Если комплексное число  $z$  является корнем многочлена  $f(x)$  с действительными коэффициентами, то число  $\bar{z}$ , сопряженное  $z$ , также является корнем этого многочлена.*

При доказательстве этого утверждения мы будем использовать следующие свойства сопряженных чисел:

$$\begin{array}{l}
 1) \overline{z_1 + z_2 + \dots + z_k} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \dots + \bar{z}_k; \\
 2) \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2; \\
 3) \overline{z^n} = \bar{z}^n;
 \end{array}$$

4) если  $z$  — действительное число, то  $\bar{z} = z$ .

Итак, пусть  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ , где, напомним,  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$  — действительные числа. Тогда

$$\begin{aligned} f(\bar{z}) &= a_n \bar{z}^n + a_{n-1} \bar{z}^{n-1} + \dots + a_1 \bar{z} + a_0 = \\ &= \overline{a_n z^n} + \overline{a_{n-1} z^{n-1}} + \dots + \overline{a_1 z} + \overline{a_0} = \\ &= \overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0} = \overline{f(z)} = \overline{0} = 0. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Таким образом, если  $z$  — корень, то  $\bar{z}$  — тоже корень многочлена  $f(x)$ . Выясним теперь, как обстоит дело с кратностями этих корней.

*Если число  $z$  — корень кратности  $k$  многочлена  $f(x)$  с действительными коэффициентами, то  $\bar{z}$  — корень той же кратности этого многочлена.*

В самом деле, так как  $z$  — корень кратности  $k$  многочлена  $f(x)$ , то  $f(z) = 0, f'(z) = 0, f''(z) = 0, \dots, f^{(k-1)}(z) = 0$ , а  $f^{(k)}(z) \neq 0$ . Поскольку  $f(x)$  имеет действительные коэффициенты, то такими же являются и коэффициенты его производных. Тогда из только что доказанного утверждения следует, что  $f(\bar{z}) = f'(\bar{z}) = f''(\bar{z}) = \dots = f^{(k-1)}(\bar{z}) = 0$ .

Если предположить, что  $f^{(k)}(\bar{z}) = 0$ , то  $f^{(k)}(\bar{z}) = 0$ , т. е.  $f^{(k)}(z) = 0$ . Пришли к противоречию. Значит,  $f^{(k)}(\bar{z}) \neq 0$ , а тогда  $\bar{z}$  — корень кратности  $k$  многочлена  $f(x)$ .

Доказанные утверждения помогают в некоторых случаях найти корни многочлена.

Пусть, например, нужно решить эту задачу для многочлена  $f(x) = x^4 + x^3 - x^2 - 10x - 12$ , если один из его корней  $c_1 = -1 + i\sqrt{3}$  известен. Из доказанного выше утверждения сразу следует, что  $c_2 = \bar{c}_1 = -1 - i\sqrt{3}$  —

еще один корень многочлена  $f(x)$ . Тогда, как известно,  $f(x)$  делится на многочлен  $g(x) = (x - c_1)(x - \bar{c}_1) = x^2 - (c_1 + \bar{c}_1)x + c_1\bar{c}_1$ . Но  $c_1 + \bar{c}_1 = -2$ , а  $c_1\bar{c}_1 = 4$ . Следовательно,  $g(x) = x^2 + 2x + 4$ . Разделив «углом»  $f(x)$  на  $g(x)$ , получим  $f(x) = (x^2 + 2x + 4)(x^2 - x - 3)$ . Значит, два других корня многочлена  $f(x)$  являются корнями многочлена  $x^2 - x - 3$ , и мы можем легко их найти.

Согласно основной теореме алгебры, всякий многочлен степени  $n \geq 1$  имеет комплексные корни. Но в математике довольно часто возникает вопрос о существовании действительных корней данного многочлена. В простейших случаях ответить на этот вопрос можно, отыскивая все корни этого многочлена. Если же рассматривать такую задачу для многочлена  $f(x) = x^5 + 2x^2 - \sqrt{3}x + \pi$ , то вряд ли можно решить ее методом нахождения всех корней. В данном случае ответ на поставленный вопрос можно найти гораздо проще. Указанный многочлен, как известно, имеет пять корней с учетом их кратностей. Причем, если  $z_1$  — его комплексный, но не действительный корень, то  $\bar{z}_1$  — тоже корень и  $z_1 \neq \bar{z}_1$ . Таким образом, комплексных, но не действительных, корней многочлена всегда четное число. Значит, рассматриваемый многочлен может иметь самое большее четыре комплексных, но не действительных, корня, а так как всего корней пять, то хотя бы один из них обязательно действителен.

Рассуждая аналогично, читатель легко сможет доказать следующее утверждение.

*Всякий многочлен нечетной степени с действительными коэффициентами имеет по крайней мере один действительный корень.*

## Упражнения

134. Найдите все корни многочлена  $f(x)$ , если один из них  $(c)$  известен:

$$a) f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 30, \quad c = 3 + i\sqrt{6};$$

$$б) f(x) = 4x^4 - 24x^3 + 53x^2 + 18x - 42, \quad c = 3 - i\sqrt{5}.$$

135. Укажите многочлен  $f(x)$  с действительными коэффициентами наименьшей степени, для которого числа  $-1$ ,  $2$ ,  $1 + 2i$ ,  $i$  являются корнями кратностей  $3$ ,  $1$ ,  $2$ ,  $1$  соответственно.

136. Докажите, что многочлен  $f(x)$  имеет ровно один действительный корень, если:

$$a) f(x) = x^3 + 7x^2 + 24x - 1;$$

$$б) f(x) = x^3 - 5x^2 + 12x + 1.$$

137. Докажите, что при любом действительном  $k$  многочлен  $f(x)$  имеет ровно один действительный корень:

$$a) f(x) = x^3 - x^2 + x + k;$$

$$б) f(x) = x^3 + 7x^2 + 25x + k.$$

### **РАЗЛОЖЕНИЕ НА МНОЖИТЕЛИ МНОГОЧЛЕНОВ С ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ**

Как известно, всякий многочлен можно разложить в произведение многочленов первой степени с комплексными коэффициентами. А сейчас рассмотрим такой вопрос: как разложить многочлен с действительными коэффициентами на множители с действительными же коэффициентами. Ответ на этот вопрос дает следующее утверждение.

*Всякий многочлен  $f(x)$  степени  $n \geq 1$  с действительными коэффициентами раскладывается в произведение линейных двучленов и квадратных трехчленов с отрицательным дискриминантом, имеющих действительные коэффициенты.*

Для доказательства этого утверждения выпишем все корни многочлена  $f(x)$ . Вообще говоря, он может иметь и действительные корни, и корни, не являющиеся действительными числами. Пусть  $c_1, c_2, \dots, c_k$  — все его действительные корни, причем каждый корень записан столько раз, какова его кратность. Вспомним далее, что комплексные корни, не являющиеся действительными числами, встречаются попарно. Каждая такая пара со-

стоит из двух взаимно сопряженных корней. Пусть  $z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, \dots, z_m, \bar{z}_m$  — все такие корни многочлена  $f(x)$ , записанные с учетом кратности каждого из них. Тогда  $f(x) = a_n(x - c_1) \cdots (x - c_k)(x - z_1)(x - \bar{z}_1) \cdots (x - z_m) \times \times (x - \bar{z}_m)$ . Рассмотрим пары сомножителей вида  $x - z_j, x - \bar{z}_j, j = 1, 2, \dots, m$ . Легко найти, что  $(x - z_j)(x - \bar{z}_j) = x^2 - (z_j + \bar{z}_j)x + z_j\bar{z}_j$ . Если  $z_j = a_j + b_j i$ , то  $\bar{z}_j = a_j - b_j i$ , и тогда  $(x - z_j)(x - \bar{z}_j) = x^2 - 2a_j x + (a_j^2 + b_j^2)$  — квадратный трехчлен с действительными коэффициентами. Так как он не имеет действительных корней, то его дискриминант отрицателен. Обозначим  $2a_j = p_j$  и  $a_j^2 + b_j^2 = q_j$ . Тогда  $(x - z_j)(x - \bar{z}_j) = x^2 + p_j x + q_j$  и  $f(x) = a_n(x - c_1)(x - c_2) \cdots (x - c_k)(x^2 + p_1 x + q_1) \cdots (x^2 + p_m x + q_m)$ , что и требовалось доказать.

## У п р а ж н е н и я

138. Разложите многочлен  $f(x)$  на множители с действительными коэффициентами, если один его корень  $c$  известен:

а)  $f(x) = x^3 - 4x^2 + 14x - 20, c = 1 + 3i$ ;

б)  $f(x) = x^4 - 7x^3 + 19x^2 - 23x + 10, c = 2 - i$ ;

в)  $f(x) = x^4 - x^2 + 2x + 2, c = 1 + i$ .

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРОГРАММИРУЕМОГО МИКРОКАЛЬКУЛЯТОРА «ЭЛЕКТРОНИКА МК-54»

### ВЫЧИСЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ МНОГОЧЛЕНА ПО СХЕМЕ ГОРНЕРА

Итак, читатель уже знаком с алгоритмом нахождения значений многочлена по схеме Горнера. Однако до сих пор эти вычисления приходилось выполнять вручную, на листе бумаги, что весьма утомительно, требует повышенного внимания и немало времени.

Например, если  $f(x) = 3x^5 - 2,7x^3 + 3,25x^2 + x + 1,17$  и нужно вычислить  $f(1,2)$ , то придется изрядно потрудиться. И здесь нам на помощь приходят ЭВМ, в частности микрокалькуляторы, которые эту работу могут выполнить быстро и без ошибок. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим программу вычисления значений этого многочлена по схеме Горнера для микрокалькулятора «Электроника МК-54».

Пусть  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ,  $a_n \neq 0$ , и нужно найти значение этого многочлена при  $x = c$ , т. е. вычислить  $f(c)$ . Чтобы выполнить эти вычисления на МК-54 по приведенной ниже программе, нужно ввести в регистры памяти (РП) микрокалькулятора исходные данные следующим образом:  $a_0$  — в РПб,  $a_1$  — в РП1,  $a_2$  — в РП2, ...,  $a_n$  — в РПн, ст.  $f(x) = n$  — в РПс, число  $c$  — в РПХ, т. е. число  $c$  набираем на клавиатуре (после набора оно появится на индикаторе). Результат вычислений, т. е.  $f(c)$ , также высветится на индикаторе. С учетом возможностей микрокалькулятора степень мно-



гочлена  $f(x)$  не должна превышать 10. Приведем текст программы (см. программу 1).

*Программа 1*

Адрес команды	Команда	Код команды
00	$X \rightarrow \Pi \ d$	4Г
01	$\Pi \rightarrow X \ c$	6С
02	$X \rightarrow \Pi \ 0$	40
03	$\text{К} \ \Pi \rightarrow X \ B \uparrow$	ГЕ
04	$B \uparrow$	0Е
05	$\leftrightarrow$	14
06	$\Pi \rightarrow X \ d$	6Г
07	$\times$	12
08	$\text{К} \ \Pi \rightarrow X \ 0$	Г0
09	$+$	10
10	$\Pi \rightarrow X \ 0$	60
11	$F \ X = 0$	5Е
12	05	05
13	$\leftrightarrow$	14
14	$\Pi \rightarrow X \ b$	6L
15	$+$	10
16	С/П	50

Предположим, что программа 1 уже записана в программную память микрокалькулятора, и вычислим  $f(1, 2)$ , где  $f(x) = 3x^5 - 2,7x^3 + 3,25x^2 + x + 1,17$ . Для этого введем в микрокалькулятор исходные данные:  $a_0 = 1,17$  заносим в РПб,  $a_1 = 1$  — в РП1,  $a_2 = 3,25$  — в РП2,  $a_3 =$

$= -2,7$  — в РПЗ,  $a_4 = 0$  — в РП4 (не забывайте, что отсутствие в записи члена с  $x^4$  означает, что его коэффициент равен 0),  $a_5 = 3$  — в РП5, ст.  $f(x) = 5$  — в РПС. Далее, набираем на клавиатуре МК число  $c = 1,2$  (оно высвечивается на индикаторе) и последовательным нажатием клавиш В/О С/П запускаем программу. Примерно через 13 с на индикаторе появится результат — 9,84936, т. е.  $f(1,2) = 9,84936$ .

Вычислите  $f(1,2)$  для данного многочлена вручную, на листе бумаги, и сравните затраченное на это время с временем счета микрокалькулятора по заданной программе. Сравнение будет явно не в вашу пользу.

Если теперь требуется найти, например,  $f(-2,3)$  для того же многочлена  $f(x)$ , то, набирая на клавиатуре число  $-2,3$  и запуская программу нажатием клавиш В/О С/П, через те же 13 с получаем  $f(-2,3) = -144,17689$ .

Для того чтобы вычислить значения какого-либо другого многочлена при  $x = c$ , достаточно ввести в соответствующие регистры памяти микрокалькулятора коэффициенты и степень этого многочлена.

Для многочлена пятой степени, как мы отмечали, время счета его значения — 13 с. Если степень многочлена выше (ниже), то время счета несколько больше (меньше).

При вычислении значений многочлена с помощью микрокалькулятора возникает целый ряд вопросов, который мы сейчас и рассмотрим.

1. Если, например,  $f(x) = x^3 + x + 1$  и нужно вычислить  $f(3,111)$ , то при вычислении без использования микрокалькулятора получим  $f(3,111) = 34,220256631$ . Микрокалькулятор же выдаст такой результат:  $f(3,111) = 34,220256$ . Дело в том, что у микрокалькулятора не хватает разрядов индикатора, чтобы высветить результат полностью, и поэтому высвечивается лишь его приближенное значение. Тем не менее этот приближенный ре-

зультат достаточно точен. Его относительная погрешность, как нетрудно подсчитать, равна 0,0000018 %.

2. Пусть теперь нужно вычислить значение многочлена  $f(x) = \frac{1}{5}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{7}{8}x + \frac{1}{20}$  при  $x = 3$ . Для этого необходимо предварительно ввести исходные данные в соответствующие регистры памяти микрокалькулятора:  $a_0 = 1/20$  записать в РПб,  $a_1 = -7/8$  — в РП1 и т. д. Но числа в микрокалькулятор мы можем вводить лишь в виде десятичных дробей. Значит, коэффициенты данного многочлена нужно представить именно в таком виде. Это можно сделать без всякого труда:  $a_0 = 1/20 = 0,05$ ,  $a_1 = -7/8 = -0,875$  и т. д. Однако чтобы избежать каких-либо вычислений на бумаге и не ошибиться при переводе обыкновенной дроби в десятичную, следует использовать микрокалькулятор. Ведь перевести обыкновенную дробь в десятичную — это значит разделить ее числитель на знаменатель. Поэтому коэффициент  $a_2 = 3/4$  данного многочлена можно ввести в РП2 по следующей программе:

3    В↑    4    ÷    X→П    2

а коэффициент  $a_1 = -7/8$  в РП1 — по программе

7    В↑    8    ÷    /—/    X→П    1

Так как все коэффициенты данного многочлена представимы в виде конечных десятичных дробей (напомним, что обыкновенная несократимая дробь  $a/b$  представима в виде конечной десятичной дроби тогда и только тогда, когда ее знаменатель  $b$  имеет в качестве простых делителей лишь числа 2 и 5, т. е. когда  $b = 2^n 5^m$ , где  $n$  и  $m$  — целые неотрицательные числа), то, записав их и степень многочлена в соответствующие регистры памяти, мы без всякого труда вычислим  $f(3)$ .

Проблемы возникают в том случае, когда некоторые коэффициенты многочлена непредставимы в виде конечных десятичных дробей. Пусть, например, нам нужно вычислить значение многочлена  $f(x) = x^3 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{3}{7}x + \frac{1}{2}$  при  $x = 2$ . Здесь коэффициенты  $a_1 = -3/7$  и  $a_2 = 2/3$  представимы в виде бесконечных десятичных дробей, и поэтому в регистры памяти микрокалькулятора мы можем записать лишь их приближенные значения. Очевидно, что тогда микрокалькулятор выдаст лишь приближенное значение  $f(2)$ . Но нам хотелось бы получить точный результат. Оказывается, это вполне возможно.

Найдем наименьший общий знаменатель коэффициентов данного многочлена (число 42) и рассмотрим многочлен  $g(x) = 42f(x) = 42x^3 + 42 \cdot \frac{2}{3}x^2 - 42 \cdot \frac{3}{7}x + 42 \cdot \frac{1}{2} = 42x^3 + 28x^2 - 18x + 21$ . Коэффициенты многочлена  $g(x)$  — целые числа, и поэтому с помощью микрокалькулятора легко получаем, что  $g(2) = 433$ . Итак,  $42f(2) = 433$ , а значит,  $f(2) = 433/42$ .

Заметим, что коэффициенты построенного нами вспомогательного многочлена  $g(x)$  совсем не обязательно вычислять вручную, на листе бумаги. Это можно сделать с помощью микрокалькулятора. Например, коэффициент  $a_2 = 42 \cdot \frac{2}{3}$  в РП2 можно ввести по такой программе:

42 В↑ 2 × 3 ÷ X→П 2

3. Пусть теперь нам нужно вычислить  $f(3/20)$ , где  $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x + 1$ . Для этого в соответствующие регистры памяти микрокалькулятора введем коэффициенты данного многочлена и его степень, затем последовательным нажатием клавиш:

3 В↑ 20 ÷

введем в РХ число  $3/20$  в виде десятичной дроби и запустим программу. Через несколько секунд микрокалькулятор выдаст значение  $f(3/20)$ . В данном случае у нас не возникло никаких проблем, ибо число  $3/20$  представимо в виде конечной десятичной дроби.

А вот если нужно вычислить  $f(2/3)$  для того же многочлена  $f(x)$ , то ситуация меняется. Число  $2/3$  представимо в виде бесконечной десятичной дроби, и поэтому в микрокалькулятор мы можем ввести лишь его приближенное значение. Значит, и результат будет приближенным. Можно ли получить точное значение  $f(2/3)$ ? Да, можно, но для этого нам нужно доказать одно утверждение.

Пусть  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ,  $a_n \neq 0$ , — многочлен и  $l/m$  — рациональное число. Построим новый многочлен  $g(x) = a_n x^n + a_{n-1} m x^{n-1} + \dots + a_1 m^{n-1} x + a_0 m^n$ . Тогда  $f(l/m) = g(l)/m^n$ .

В самом деле,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{l}{m}\right) &= a_n \left(\frac{l}{m}\right)^n + a_{n-1} \left(\frac{l}{m}\right)^{n-1} + \dots + a_1 \frac{l}{m} + a_0 = \\ &= \frac{1}{m^n} (a_n l^n + a_{n-1} m l^{n-1} + \dots + a_1 m^{n-1} l + \\ &\quad + a_0 m^n) = \frac{1}{m^n} g(l). \end{aligned}$$

Итак, на основании доказанного утверждения, в условиях рассматриваемого примера  $f(2/3) = g(2)/3^3$ , где  $g(x) = x^3 - 2 \cdot 3x^2 + 4 \cdot 3^2x + 1 \cdot 3^3$ . Значение  $g(2)$  мы легко можем найти с помощью микрокалькулятора. Получим  $g(2) = 83$ , а значит,  $f(2/3) = 83/3^3 = 83/27$ .

Заметим, что коэффициенты вспомогательного многочлена  $g(x)$  можно вводить в регистры памяти микрокалькулятора, предварительно не вычисляя их. Например,

коэффициент  $a_1 = 4 \cdot 3^2$  вводится в РП1 следующим образом:

$$3 \quad \text{В} \uparrow \quad 3 \quad \times \quad 4 \quad \times \quad \text{X} \rightarrow \text{П} \quad 1$$

4. Если коэффициенты многочлена или значение переменной  $x$  — иррациональные числа, то, конечно, значение многочлена мы можем вычислить лишь приближенно. В тех случаях, когда с помощью микрокалькулятора мы получаем приближенные результаты, естественно возникает вопрос о их точности. Но этот вопрос — предмет особого, серьезного разговора, выходящего за рамки нашей книги.

## У п р а ж н е н и я

139. Используя программу 1, вычислите с помощью микрокалькулятора  $f(c)$ , если:

а)  $f(x) = x^6 + 2x^5 - 61x^4 + x^3 + 7x - 20$ ,  $c = -1,3$ ;

б)  $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{4}x^3 + \frac{7}{20}x - \frac{1}{25}$ ,  $c = \frac{3}{5}$ ;

в)  $f(x) = x^4 - \frac{3}{7}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{5}{14}$ ,  $c = \frac{1}{2}$ ;

г)  $f(x) = x^4 - \frac{2}{5}x^2 + \frac{1}{8}x + \frac{3}{4}$ ,  $c = \frac{7}{3}$ .

## ПОИСК РАЦИОНАЛЬНЫХ КОРНЕЙ МНОГОЧЛЕНА

Значительно облегчить поиск рациональных корней многочлена можно, используя программу 1 (вычисления значений многочлена). Рассмотрим это на примере.

Найдем рациональные корни многочлена  $f(x) = 6x^4 + 13x^3 - 24x^2 - 8x + 8$  (эту задачу мы уже решили на с. 65). Из первой теоремы о рациональных корнях многочлена следует, что рациональные корни многочлена  $f(x)$  находятся среди чисел  $\pm 1$ ,  $\pm 1/2$ ,  $\pm 1/3$ ,  $\pm 1/6$ ,  $\pm 2$ ,  $\pm 2/3$ ,

$\pm 4, \pm 4/3, \pm 8, \pm 8/3$ . Далее, чтобы найти эти корни, нужно для каждого из выписанных выше чисел сделать проверку. И здесь нас «испугало» большое число проверок, поэтому мы «придумали» вторую теорему о рациональных корнях многочлена, которая значительно облегчила дальнейшую работу.

При использовании микрокалькулятора число проверок несущественно. Их можно выполнить быстро и без ошибок.

Запишем в программную память микрокалькулятора программу 1. Вычислим сначала с его помощью значения  $f(x)$  для тех из указанных выше значений переменной  $x$ , которые представимы в виде конечных десятичных дробей, т. е. для  $x = \pm 1, \pm 1/2, \pm 2, \pm 4, \pm 8$ . При этом получим, что только  $f(1/2) = 0$ . Теперь осталось проверить таких «кандидатов» в корни:  $\pm \frac{1}{3}, \pm \frac{1}{6}, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{4}{3}, \pm \frac{8}{3}$ . Уже говорилось о том, что если ввести в микрокалькулятор приближенные значения этих чисел, то в результате получаются приближенные значения многочлена  $f(x)$ . Это нас устроить не может.

Например, легко вычислить вручную, на бумаге, без микрокалькулятора, что  $f(-2/3) = 0$ . Если же мы вычислим это же значение многочлена с помощью микрокалькулятора по программе 1, введя в него приближенное значение числа  $-2/3$ , то получим, что  $f(-2/3) = 10^{-7}$ . Таким образом,  $-2/3$  — корень многочлена  $f(x)$ , а по приближенному значению  $f(-2/3)$ , полученному с помощью микрокалькулятора, обнаружить это не удастся. Значит, необходимо находить точные значения  $f(x)$  для оставшихся «кандидатов» в корни. Это можно сделать, воспользовавшись рекомендациями, данными в предыдущем параграфе. Из них следует, что  $l/m$  является корнем многочлена  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

тогда и только тогда, когда  $l$  является корнем многочлена  $g(x) = a_n x^n + a_{n-1} m x^{n-1} + \dots + a_1 m^{n-1} x + a_0 m^n$ . Таким образом, в данном случае вместо того, чтобы проверять, будут ли числа  $\pm 1/3, \pm 2/3, \pm 4/3, \pm 8/3$  корнями многочлена  $f(x) = 6x^4 + 13x^3 - 24x^2 - 8x + 8$ , достаточно убедиться, являются ли числа  $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$  корнями многочлена  $g(x) = 6x^4 + 13 \cdot 3x^3 - 24 \cdot 3^2 x^2 - 8 \cdot 3^3 x + 8 \cdot 3^4$ . Последняя же проверка совершенно точно осуществляется с помощью микрокалькулятора по программе 1. В результате ее получим, что  $-2$  — корень  $g(x)$ , а значит,  $-\frac{2}{3}$  — корень многочлена  $f(x)$ .

Аналогично осуществляется проверка и для чисел  $\pm 1/6$ , в результате чего устанавливается, что они корнями не являются.

Таким образом, данный многочлен  $f(x)$  имеет два рациональных корня  $-1/2$  и  $-2/3$ .

## У п р а ж н е н и я

140. Выполните упражнения 91а и 91в, используя микрокалькулятор.

### ОСВОБОЖДЕНИЕ ОТ ИРРАЦИОНАЛЬНОСТИ В ЗНАМЕНАТЕЛЕ ДРОБИ. ПРОВЕРКА РЕЗУЛЬТАТА

Ранее (см. с. 93) мы уже избавились от иррациональности в знаменателе дроби  $\frac{1}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+3}$  и получили, что

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+3} = \frac{-2\sqrt[3]{4}+5\sqrt[3]{2}+11}{47}.$$

При решении этой задачи, как вы помните, нам пришлось



проводить довольно-таки громоздкие вычисления. Поэтому, естественно, возникает вопрос, верный ли результат мы получили? Конечно, проверку можно осуществить и на листе бумаги, вручную. Полученное равенство верно тогда и только тогда, когда

$$(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 3)(-2\sqrt[3]{4} + 5\sqrt[3]{2} + 11) = 47.$$

Это равенство можно проверить, раскрыв скобки в левой части. Но такая работа трудоемка и неинтересна. А вот с помощью микрокалькулятора проверку осуществить можно легко и быстро.

Заметим, что знаменатель  $\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 3$  заданной дроби — это значение многочлена  $f(x) = x^3 - x + 3$  при  $x = \sqrt[3]{2}$ , а числитель полученного результата  $-2\sqrt[3]{4} + 5\sqrt[3]{2} + 11$  — значение многочлена  $u(x) = -2x^3 + 5x + 11$  тоже при  $x = \sqrt[3]{2}$ . Таким образом, нужно убедиться, что равенство

$$\frac{1}{f(\sqrt[3]{2})} = \frac{u(\sqrt[3]{2})}{47} \quad (1)$$

верно.

Запишем в программную память микрокалькулятора программу 1 и вычислим  $f(\sqrt[3]{2})$ . Для этого, как вам известно, нужно записать в регистры памяти соответствующие исходные данные. В частности, в РХ нужно записать  $\sqrt[3]{2}$ . Это делается последовательным нажатием клавиш:

1 В↑ 3 ÷ 2 F Ху

после чего на индикаторе появляется число 1,259921. Это

и есть приближенное значение  $\sqrt[3]{2}$ . А теперь, когда все исходные данные введены, запускаем программу, нажав клавиши В/О С/П. Через несколько секунд получим, что  $f(\sqrt[3]{2}) \approx 3,3274799$ . Далее, не сбрасывая этот результат с индикатора, нажимаем клавиши F 1/x, после чего получаем  $1/f(\sqrt[3]{2}) \approx 0,30052773$ .

Аналогично вычисляем  $u(\sqrt[3]{2}) \approx 14,124803$  и, не сбрасывая полученный результат с индикатора, после нажатия клавиш  $47 \div$  получаем, что  $u(\sqrt[3]{2})/47 \approx 0,30052772$ .

Видим, что приближенные значения левой и правой частей равенства (1) практически совпадают. Значит, почти с полной уверенностью можно сказать, что проверяемое равенство верно, т. е. задачу освобождения от иррациональности в знаменателе мы решили правильно.

## У п р а ж н е н и я

141. Проверьте с помощью микрокалькулятора правильность результатов упражнений 107а, 107б и 107д.

## ДЕЛЕНИЕ МНОГОЧЛЕНА НА ЛИНЕЙНЫЙ ДВУЧЛЕН

Как известно, схема Горнера — это по существу алгоритм деления с остатком многочлена  $f(x)$  на линейный двучлен  $x - c$ , который можно реализовать на микрокалькуляторе.

Пусть  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ,  $a_n \neq 0$ . Запишем программу, по которой осуществляется деление  $f(x)$  на  $x - c$  (см. программу 2).

Исходные данные в регистрах памяти располагаются

Адрес команды	Команда	Код команды
00	$X \rightarrow \Pi \ d$	4Г
01	$\Pi \rightarrow X \ c$	6С
02	$X \rightarrow \Pi \ 0$	40
03	$K \ \Pi \rightarrow X \ B \uparrow$	ГЕ
04	$\Pi \rightarrow X \ d$	6Г
05	$\times$	12
06	$\Pi \rightarrow X \ 0$	60
07	1	01
08	—	11
09	$F \ X \neq 0$	57
10	17	17
11	$\leftrightarrow$	14
12	$K \ \Pi \rightarrow X \ 0$	Г0
13	+	10
14	$K \ X \rightarrow \Pi \ B \uparrow$	LE
15	БП	51
16	04	04
17	$\leftrightarrow$	14
18	$\Pi \rightarrow X \ b$	6L
19	+	10
20	С/П	50

точно так же, как и в случае использования программы 1, т. е.  $a_0$  записывается в РПb,  $a_1$  — в РП1,  $a_2$  — в РП2 и так далее, ст.  $f(x) = n$  ( $n \leq 10$ ) — в РПс, число  $c$  — в РХ.

Напомним, что разделить  $f(x)$  на  $x - c$  с остатком — это значит представить  $f(x)$  в виде  $f(x) = (x - c) \times \times (b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \dots + b_1x + b_0) + r$ .

Другими словами, нужно найти коэффициенты  $b_{n-1}, b_{n-2}, \dots, b_1, b_0$  неполного частного и остаток  $r$ . После того как микрокалькулятор выполнит деление с остатком  $f(x)$  на  $x - c$  по программе 2, остаток  $r$  появится на индикаторе,  $b_0$  будет храниться в РП1,  $b_1$  — в РП2,  $b_2$  — в РП3 и т. д.

Например, чтобы разделить с остатком  $f(x) = 2x^4 - 5,2x^3 + 3,5x^2 - 4x + 3,4$  на  $x - 2,1$ , т. е. представить его в виде  $f(x) = (x - 2,1)(b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0) + r$  (в предположении, конечно, что программа 2 уже записана в программную память микрокалькулятора), нужно записать  $a_0 = 3,4$  в РПб,  $a_1 = -4$  в РП1,  $a_2 = 3,5$  в РП2,  $a_3 = -5,2$  в РП3,  $a_4 = 2$  в РП4, ст.  $f(x) = 4$  в РПс, число  $c = 2,1$  набрать на клавиатуре и запустить программу нажатием клавиш В/О С/П. Примерно через 15 с после этого микрокалькулятор выполнит деление и на индикаторе появится число 1,174, т. е.  $r = 1,174$ . Далее, как мы уже говорили, коэффициенты неполного частного  $b_0, b_1, b_2, b_3$  будут содержаться в РП1, РП2, РП3, РП4 соответственно. Чтобы вывести на индикатор число, содержащееся в РП1, т. е.  $b_0$ , нужно нажать клавиши  $\Pi \rightarrow X$  1. После этого на индикаторе появится число  $-1,06$ . Значит,  $b_0 = -1,06$ . Аналогично получаем остальные коэффициенты неполного частного:  $b_1 = 1,4, b_2 = -1, b_3 = 2$ .

Итак,  $f(x) = (x - 2,1)(2x^3 - x^2 + 1,4x - 1,06) + 1,174$ .

Мы видим, что после выполнения микрокалькулятором программы 2 коэффициенты исходного многочлена в регистрах памяти не сохраняются, на их место записываются коэффициенты неполного частного. Значит, для деления того же многочлена  $f(x)$  на какой-то другой линейный двучлен, нужно, прежде чем запустить программу, заново записать коэффициенты этого многочлена

Адрес команды	Команда	Код команды
00	$X \rightarrow \Pi \ d$	4Г
01	$\Pi \rightarrow X \ c$	6С
02	$X \rightarrow \Pi \ 0$	40
03	$K \ \Pi \rightarrow X \ B \uparrow$	ГЕ
04	$\Pi \rightarrow X \ d$	6Г
05	$\times$	12
06	$\Pi \rightarrow X \ 0$	60
07	1	01
08	—	11
09	$F \ X \neq 0$	57
10	17	17
11	$\leftrightarrow$	14
12	$K \ \Pi \rightarrow X \ 0$	Г0
13	+	10
14	С/П	50
15	БП	51
16	04	04
17	$\leftrightarrow$	14
18	$\Pi \rightarrow X \ b$	6L
19	+	10
20	С/П	50
21	0	00
22	$\div$	13
23	С/П	50

в соответствующие регистры памяти, что является существенным недостатком программы 2.

А вот приведенная выше программа 3 деления многочлена на линейный двучлен свободна от такого недостатка.

Здесь исходные данные записываются в регистры памяти точно так же, как и в случае программы 2. Далее, чтобы найти коэффициенты неполного частного  $s(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \dots + b_1x + b_0$  и остаток  $r$ , действуем следующим образом (считаем, конечно, что программа 3 уже записана в программную память):

1) старший коэффициент  $b_{n-1}$  неполного частного, как известно, равен старшему коэффициенту многочлена  $f(x)$ , т. е.  $b_{n-1} = a_n$ . Значит, нам осталось найти  $b_{n-2}, b_{n-3}, \dots, b_1, b_0$ ;

2) запускаем программу, нажав клавиши В/О С/П. Через 3—4 с на индикаторе появится число  $b_{n-2}$ ;

3) записав найденное значение коэффициента  $b_{n-2}$ , нажмем клавишу С/П. После этого микрокалькулятор продолжит вычисления и опять же через 3—4 с на индикаторе появится значение следующего коэффициента  $b_{n-3}$ ;

4) чтобы найти коэффициент  $b_{n-4}$ , нужно нажать клавишу С/П еще раз (записав предварительно значение  $b_{n-3}$ ). Через те же 3—4 с на индикаторе высветится значение  $b_{n-4}$  и т. д.

Действуя таким образом, можно получить последовательно все коэффициенты неполного частного и остаток  $r$ . Если после этого нажать клавишу С/П еще раз, то опять же через 3—4 с на индикаторе высветится слово Error — ошибка. Этим микрокалькулятор предупреждает вас, что все коэффициенты неполного частного и остаток уже вычислены и любые попытки заставить его решать задачу, которую он уже решил, будут напрасными.

Пусть программа 3 уже записана в программную память микрокалькулятора. Разделим с остатком многочлен  $f(x) = x^6 + 4x^4 - 5x^3 - 7x + 3$  на  $x - 1,5$ . Для этого вводим исходные данные: записываем коэффициенты  $a_6 = 1, a_5 = 0, a_4 = 4, a_3 = -5, a_2 = 0, a_1 = -7, a_0 = 3$  в регистры РП6, РП5, РП4, РП3, РП2, РП1, РПб соответственно, ст.  $f(x) = 6$  записываем в РПс; на клавиатуре набираем число  $c = 1,5$ . В нашем случае неполное частное имеет вид  $s(x) = b_5x^5 + b_4x^4 + b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$ . Как мы уже отмечали,  $b_5 = b_6 = 1$ . Далее запускаем программу, нажав клавиши В/О и С/П. Через 3—4 с на индикаторе появится число 1,5. Это  $b_4$ . Вычислим следующий коэффициент, нажав клавишу С/П. Через 3—4 с на индикаторе высветится число 6,25. Это коэффициент  $b_3$ . Нажав после этого клавишу С/П еще раз, мы через те же 3—4 с получим, что  $b_2 = 4,375$ . Аналогично находим, что  $b_1 = 6,5625, b_0 = 2,84375$ . И, наконец, нажав клавишу С/П в последний раз, получим остаток  $r = 7,265625$ . Если теперь по рассеянности нажать клавишу С/П еще раз, то на индикаторе высветится слово Error, которое напомним о том, что задача уже полностью решена.

Таким образом,

$$f(x) = (x - 1,5)(x^5 + 1,5x^4 + 6,25x^3 + 4,375x^2 + 6,5625x + 2,84375) + 7,265625.$$

Если теперь нужно разделить с остатком тот же многочлен  $f(x)$ , например, на  $x + 2,7$ , то следует лишь набрать на клавиатуре МК число  $c = -2,7$  и действовать далее согласно изложенной выше инструкции. Коэффициенты и степень данного многочлена  $f(x)$  заново записывать не надо, так как они сохраняются в соответствующих регистрах памяти.

В том случае, когда и коэффициенты многочлена  $f(x)$ , и число  $c$  представимы в виде конечных десятичных дробей, мы с помощью микрокалькулятора получаем точные

значения коэффициентов неполного частного и остатка (если, конечно, хватает разрядов индикатора, чтобы результат высветился полностью). Если же либо некоторые коэффициенты, либо число  $c$  непредставимы в виде конечных десятичных дробей, то в регистры памяти микрокалькулятора мы можем записать лишь их приближенные десятичные значения, а значит, и соответствующие результаты микрокалькулятор будет выдавать приближенными. В некоторых случаях нас это, может быть, и устроит, но иногда, как мы увидим в дальнейшем, нам будут необходимы точные результаты. Вот и выясним, как их получить.

Пусть, например, нужно разделить  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{5}x^2 - \frac{2}{9}x + 2$  на  $x - 2$  с остатком. Найдем наименьший общий знаменатель коэффициентов данного многочлена (он равен 45) и рассмотрим многочлен  $45f(x) = 15x^3 - 18x^2 - 10x + 90$ . С помощью микрокалькулятора легко получаем, что  $45f(x) = (x - 2)(15x^2 + 12x + 14) + 118$ , а тогда

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - 2) \frac{1}{45} (15x^2 + 12x + 14) + \frac{118}{45} = \\ &= (x - 2) \left( \frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{15}x + \frac{14}{45} \right) + \frac{118}{45}. \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили точный результат.

Разделим теперь с остатком  $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 5$  на  $x - 2/3$ . Для этого рассмотрим многочлен  $g(x) = 3^3 f(x) = 3^3 x^3 - 2 \cdot 3^3 x^2 + 4 \cdot 3^3 x - 5 \cdot 3^3 = (3x)^3 - 6(3x)^2 + 36(3x) - 135$ . Легко заметить, что многочлен  $g(x)$  — это суперпозиция многочленов  $h(x) = x^3 - 6x^2 + 36x - 135$  и  $p(x) = 3x$ . Делим с остатком, используя микрокалькулятор,  $h(x)$  на  $x - 2$ . Получим  $h(x) = (x - 2)(x^2 - 4x + 28) - 79$ . Но  $g(x) = h(3x)$ , а тогда



$3^3 f(x) = (3x - 2)((3x)^2 - 4(3x) + 28) - 79$ . Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{3}(3x - 2) \frac{1}{3^2} ((3x)^2 - 4(3x) + 28) - \frac{79}{3^3} = \\ &= \left(x - \frac{2}{3}\right) \left(x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{28}{9}\right) - \frac{79}{27}. \end{aligned}$$

Отметим еще раз, что при записи коэффициентов вспомогательных многочленов в регистры памяти совсем не обязательно предварительно вычислять эти коэффициенты на бумаге. Например, в последней задаче многочлен  $g(x)$  можно оставить в таком виде:  $g(x) = (3x)^3 - 2 \cdot 3(3x) + 4 \cdot 3^2(3x) - 5 \cdot 3^3$ . Тогда  $h(x) = x^3 - 2 \cdot 3x^2 + 4 \cdot 3^2x - 5 \cdot 3^3$  и свободный член этого многочлена можно записать в регистр РПб, нажав клавиши:

3 В↑ 3 × 3 × 5 × /—/ X→П b

## Упражнения

142. Выполните упражнение 56, используя микрокалькулятор.

143. Используя микрокалькулятор, разделите с остатком  $f(x) = 2x^4 - 15,2x^3 - 20,7x^2 + 2,3x + 7$  на  $x - c$ , если:

а)  $c = -3,7$ ;      б)  $c = 1,3$ ;      в)  $c = 2/5$ .

Какую из программ (2 или 3) удобнее использовать в данном случае?

144. Используя микрокалькулятор, разделите  $f(x)$  на  $x - c$  с остатком, если:

а)  $f(x) = \frac{1}{7}x^5 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x - \frac{5}{6}, \quad c = 1,1;$

б)  $f(x) = x^5 - \frac{2}{5}x^2 + \frac{3}{2}x - 2, \quad c = \frac{4}{3}.$

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРАТНОСТИ КОРНЯ

Для того чтобы найти кратность корня  $c$  многочлена  $f(x)$ , мы делили  $f(x)$  на  $x - c$ ; затем, если  $f(c) = 0$ , делили первое частное опять на  $x - c$  и т. д. В общем, для определения кратности корня приходилось выполнять достаточно много однообразных и скучных вычислений. Эту работу может взять на себя микрокалькулятор. Запишем программу, по которой он может найти кратность корня данного многочлена (см. программу 4).

Для определения кратности корня  $c$  многочлена  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ,  $a_n \neq 0$ , исходные данные после введения программы 4 в программную память микрокалькулятора располагаются в регистрах памяти следующим образом:  $a_0$  — в РПа,  $a_1, a_2, a_3, \dots$  — соответственно в РП1, РП2, РП3, ..., ст.  $f(x) = n$  ( $n \leq 9$ ) — в РПс, корень  $c$  — в РХ, т. е. набирают на клавиатуре. После этого нажатием клавиш В/О и С/П запускают программу, и через некоторое время на индикаторе появляется число — кратность корня  $c$ . Если после выполнения программы на индикаторе высветится число 0, то это означает, что число  $c$  на самом деле не является корнем данного многочлена  $f(x)$ .

Пусть программа 4 уже записана в программную память микрокалькулятора. Найдем теперь кратность корня  $c = 1,1$  многочлена  $f(x) = 300x^5 - 660x^4 + 363x^3 - 200x^2 + 440x - 242$ . Для этого введем в микрокалькулятор исходные данные. Коэффициенты  $a_0 = -242$ ,  $a_1 = 440$ ,  $a_2 = -200$ ,  $a_3 = 363$ ,  $a_4 = -660$ ,  $a_5 = 300$  записываем соответственно в РПа, РП1, РП2, РП3, РП4, РП5, ст.  $f(x) = 5$  — в РПс, а число  $c = 1,1$  набираем на клавиатуре. После этого, нажав клавиши В/О С/П, запускаем программу. Через 80 с на индикаторе появится число 2 — это и есть искомая кратность. Как видите, ждать результат приходится вроде бы долго — 80 с, но попробуйте

Адрес команды	Команда	Код команды
00	$X \rightarrow \Pi \ d$	4Г
01	0	00
02	$X \rightarrow \Pi \ b$	4L
03	$\Pi \rightarrow X \ c$	6C
04	$X \rightarrow \Pi \ 0$	40
05	$K \ \Pi \rightarrow X \ B \uparrow$	ГЕ
06	$\Pi \rightarrow X \ d$	6Г
07	$\times$	12
08	$\Pi \rightarrow X \ 0$	60
09	1	01
10	—	11
11	$F \ X \neq 0$	57
12	19	19
13	$\leftrightarrow$	14
14	$K \ \Pi \rightarrow X \ 0$	Г0
15	+	10
16	$K \ X \rightarrow \Pi \ B \uparrow$	LE
17	БП	51
18	06	06
19	$\leftrightarrow$	14
20	$\Pi \rightarrow X \ a$	6—
21	+	10
22	$F \ X = 0$	5E
23	54	54
24	1	01

Адрес команды	Команда	Код команды
25	$\Pi \rightarrow X \ b$	6L
26	+	10
27	$X \rightarrow \Pi \ b$	4L
28	$\Pi \rightarrow X \ c$	6C
29	1	01
30	—	11
31	$F \ X \neq 0$	57
32	54	54
33	$\Pi \rightarrow X \ 1$	61
34	$X \rightarrow \Pi \ a$	4—
35	2	02
36	$X \rightarrow \Pi \ 0$	40
37	$K \ \Pi \rightarrow X \ B \uparrow$	ГЕ
38	$K \ X \rightarrow \Pi \ 0$	L0
39	$\Pi \rightarrow X \ 0$	60
40	2	02
41	+	10
42	$X \rightarrow \Pi \ 0$	40
43	$\Pi \rightarrow X \ c$	6C
44	$\leftrightarrow$	14
45	—	11
46	$F \ X < 0$	5C
47	37	37
48	$\Pi \rightarrow X \ c$	6C
49	1	01

Адрес команды	Команда	Код команды
50	—	11
51	$X \rightarrow П \ c$	4C
52	БП	51
53	04	04
54	$П \rightarrow X \ b$	6L
55	C/П	50

проделать эту же работу вручную, на листе бумаги, и вы убедитесь, что затраченное время будет в несколько раз больше.

При выполнении программы 4 микрокалькулятор действует следующим образом: сначала он делит  $f(x)$  на  $x - c$ , коэффициенты полученного неполного частного записывает на место коэффициентов многочлена  $f(x)$ , а полученный остаток  $f(c)$  сравнивает с нулем. Если  $f(c) = 0$ , то микрокалькулятор делит первое частное на  $x - c$ , коэффициенты второго неполного частного записывает на место коэффициентов первого частного, а остаток сравнивает с нулем и т. д. Получив, наконец, ненулевой остаток, он прекращает работу, а на индикаторе высвечивается число найденных нулевых остатков, т. е. кратность корня  $c$ . Другими словами, микрокалькулятор в данном случае действует точно так же, как действовали бы вы, находя кратность корня вручную (на листе бумаги). Теперь, разобравшись, как микрокалькулятор находит кратность корня по программе 4, можно сделать некоторые выводы.

После выполнения программы 4 исходные данные (коэффициенты и степень многочлена  $f(x)$ ) в регистрах

памяти микрокалькулятора не сохраняются. Значит, для того чтобы найти кратность какого-либо другого корня того же многочлена  $f(x)$ , исходные данные этого многочлена нужно снова записать в соответствующие регистры памяти.

Далее, если либо какие-то коэффициенты многочлена  $f(x)$ , либо его корень  $s$  непредставимы в виде конечных десятичных дробей, то, введя в микрокалькулятор их приближенные десятичные значения, при нахождении кратности корня мы, вообще говоря, получим неверный результат. Дело в том, что оперируя приближенными исходными данными, микрокалькулятор при делении на  $x - s$  получит также приближенные значения коэффициентов неполного частного и остатка. А в такой ситуации приближенное значение какого-то остатка может оказаться не равным нулю, хотя в действительности остаток равен нулю. Поэтому если некоторые исходные данные непредставимы в виде конечных десятичных дробей, использовать их приближенные десятичные значения в данном случае нельзя. Тогда, как мы это делали раньше, следует свести задачу для данного многочлена к задаче для другого, исходные данные которого нас устраивают. Сейчас мы и выясним, как это сделать.

Можно без труда доказать следующее утверждение.

*Пусть  $f(x)$  — многочлен,  $a$  — число, отличное от нуля. Число  $s$  будет корнем кратности  $k$  многочлена  $f(x)$  тогда и только тогда, когда  $s$  является корнем кратности  $k$  многочлена  $af(x)$ .*

Если теперь нужно найти кратность корня  $s$  многочлена  $f(x) = x^3 - \frac{1}{5}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}$ , исходные данные которого нас не устраивают, то, согласно последнему утверждению, это эквивалентно нахождению кратности того же корня  $s$  для многочлена  $30f(x) = 30x^3 - 6x^2 + 20x + 15$ , где 30 — наименьший общий знаменатель

коэффициентов многочлена  $f(x)$ . Исходные же данные многочлена  $3f(x)$  нас вполне устраивают.

Заметим, что нашу задачу можно свести к задаче нахождения кратности корня  $c$  для многочлена  $3f(x) = 3x^3 - \frac{3}{5}x^2 + 2x + \frac{3}{2}$ , исходные данные которого также позволяют использовать микрокалькулятор.

Решить поставленную задачу в случае, когда рациональный корень многочлена непредставим в виде конечной десятичной дроби, поможет утверждение, которое мы сейчас и докажем.

*Рациональное число  $l/m$  является корнем кратности  $k$  многочлена  $f(x) = a_n x^n - a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  тогда и только тогда, когда число  $l$  является корнем кратности  $k$  многочлена  $g(x) = a_n x^n + a_{n-1} m x^{n-1} + \dots + a_1 m^{n-1} x + a_0 m^n$ .*

В самом деле, легко проверить, что  $f(l/m) = f'(l/m) = \dots = f^{(k-1)}(l/m) = 0$ ,  $f^{(k)}(l/m) \neq 0$  тогда и только тогда, когда  $g(l) = g'(l) = \dots = g^{(k-1)}(l) = 0$ ,  $g^{(k)}(l) \neq 0$ . Отсюда с учетом теоремы, приведенной на с. 55, и следует справедливость данного утверждения.

Из только что доказанного получаем, что кратность корня, например,  $2/3$  многочлена  $f(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$  равна кратности корня 2 многочлена  $g(x) = a_3 x^3 + 3a_2 x^2 + 3^2 a_1 x + 3^3 a_0$ .

Таким образом, мы можем использовать микрокалькулятор и в том случае, когда корень  $c$  — рациональное число, непредставимое в виде конечной десятичной дроби.

В заключение заметим, что все рассуждения проводились в предположении, что исходные конечные десятичные дроби и десятичные дроби, являющиеся промежуточными результатами, «умещаются» на индикаторе микрокалькулятора.

## Упражнения

145. Используя микрокалькулятор, найдите кратность корня  $c$  многочлена  $f(x)$  из упражнений 65а и 65в.

### РАЗЛОЖЕНИЕ МНОГОЧЛЕНА ПО СТЕПЕНЯМ $x - c$

Напомним, что разложить многочлен  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ,  $a_n \neq 0$ , по степеням  $x - c$  — значит представить его в виде

$$f(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!} (x - c) + \\ + \frac{f''(c)}{2!} (x - c)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x - c)^n.$$

Эту трудоемкую работу микрокалькулятор тоже может взять на себя. Рассмотрим соответствующую программу 5.

Исходные данные в этом случае размещают в регистрах памяти следующим образом: коэффициенты  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  записывают соответственно в РПб, РП1, РП2,  $\dots$ , ст.  $f(x) = n$  ( $n \leq 10$ ) — в РПс, число  $c$  — в РХ. После этого нажатием клавиш В/О С/П запускают программу. Через некоторое время на индикаторе появится число. Это  $f(c)$ , т. е. первый коэффициент искомого разложения. Записав его, нажимают клавишу С/П. Микрокалькулятор снова произведет вычисления, и на индикаторе появится число. Это  $\frac{f'(c)}{1!}$ , т. е. второй коэффициент разложения  $f(x)$  по степеням  $x - c$ . Нажав после этого клавишу С/П еще раз, получим третий коэффициент и т. д. Действуя таким образом, найдем последовательно все нужные коэффициенты. Если же, записав последний из них, нажать клавишу С/П еще раз, то на



Адрес команды	Команда	Код команды
00	$X \rightarrow \Pi \ d$	4Г
01	$\Pi \rightarrow X \ c$	6С
02	$X \rightarrow \Pi \ 0$	40
03	$K \ \Pi \rightarrow X \ B\uparrow$	ГЕ
04	$\Pi \rightarrow X \ d$	6Г
05	$\times$	12
06	$\Pi \rightarrow X \ 0$	60
07	1	01
08	—	11
09	$F \ X \neq 0$	57
10	17	17
11	$\leftrightarrow$	14
12	$K \ \Pi \rightarrow X \ 0$	Г0
13	+	10
14	$K \ X \rightarrow \Pi \ B\uparrow$	LE
15	БП	51
16	04	04
17	$\leftrightarrow$	14
18	$\Pi \rightarrow X \ b$	6L
19	+	10
20	С/П	50
21	$\Pi \rightarrow X \ c$	6С
22	1	01
23	—	11
24	$F \ X = 0$	5E

Адрес команды	Команда	Код команды
25	30	30
26	$\Pi \rightarrow X \quad 1$	61
27	C/П	50
28	БП	51
29	51	51
30	$\Pi \rightarrow X \quad 1$	61
31	$X \rightarrow \Pi \quad b$	4L
32	2	02
33	$X \rightarrow \Pi \quad 0$	40
34	$K \quad \Pi \rightarrow X \quad B \uparrow$	ГЕ
35	$K \quad X \rightarrow \Pi \quad 0$	L0
36	$\Pi \rightarrow X \quad 0$	60
37	2	02
38	+	10
39	$X \rightarrow \Pi \quad 0$	40
40	$\Pi \rightarrow X \quad c$	6C
41	$\leftrightarrow$	14
42	—	11
43	$F \quad X < 0$	5C
44	34	34
45	$\Pi \rightarrow X \quad c$	6C
46	1	01
47	—	11
48	$X \rightarrow \Pi \quad c$	4C
49	БП	51

Адрес команды	Команда	Код команды
50	02	02
51	0	00
52	÷	13
53	С/П	50

индикаторе высветится слово Еггог. Этим микрокалькулятор сообщает, что задача уже полностью решена.

Разложим, например, многочлен  $f(x) = 2,1x^3 - 7x^2 + 5,2x - 3,8$  по степеням  $x - 1,3$ , т. е. представим его в виде

$$f(x) = f(1,3) + \frac{f'(1,3)}{1!}(x - 1,3) + \\ + \frac{f''(1,3)}{2!}(x - 1,3)^2 + \frac{f'''(1,3)}{3!}(x - 1,3)^3$$

(мы предполагаем, что программа 5 уже записана в программную память микрокалькулятора). Для этого поместим коэффициенты данного многочлена  $a_0 = -3,8$ ,  $a_1 = 5,2$ ,  $a_2 = -7$ ,  $a_3 = 2,1$  в РПб, РП1, РП2, РП3 соответственно, ст.  $f(x) = 3$  — в РПс, число  $c = 1,3$  наберем на клавиатуре и запустим программу, нажав клавиши В/О С/П. После 13 с вычислений на индикаторе микрокалькулятора высветится число  $-4,2563$ . Это  $f(1,3)$ . Запишем полученный результат и нажмем затем клавишу С/П. Через 20 с на индикаторе появится число  $-2,353$ , равное  $f'(1,3)/1!$ . После этого, снова нажав клавишу С/П, получим через 13 с, что  $f''(1,3)/2! = 1,19$ . И, наконец, нажав эту же клавишу еще раз, через 3—4 с найдем  $f'''(1,3)/3! = 2,1$ . Таким образом, вычислены уже все

коэффициенты разложения. Если же теперь по рассеянности мы нажмем клавишу С/П еще раз, то через 3—4 с на индикаторе высветится слово Error (этим микрокалькулятор напомним нам, что поставленная задача уже полностью решена). Таким образом,

$$f(x) = -4,2563 - 2,353(x - 1,3) + \\ + 1,19(x - 1,3)^2 + 2,1(x - 1,3)^3.$$

Нетрудно понять, в каких случаях микрокалькулятор выдает точные значения коэффициентов разложения, а в каких приближенные, и как получить точные значения этих коэффициентов в случае, когда коэффициенты данного многочлена  $f(x)$  — рациональные числа, но не все из них представимы в виде конечных десятичных дробей (число  $c$  — конечная десятичная дробь). Рассмотрим сейчас, как получить точное разложение  $f(x)$  по степеням  $x - c$ , если  $c$  непредставимо в виде конечной десятичной дроби.

Пусть  $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 3$ , а  $c = 3/7$ , т. е. нужно разложить  $f(x)$  по степеням  $x - 3/7$ . Рассмотрим многочлен  $g(x) = 7^3 f(x) = 7^3 x^3 - 2 \cdot 7^3 x^2 + 7^3 x + 3 \cdot 7^3 = = (7x)^3 - 14(7x)^2 + 49(7x) + 1029$ . Нетрудно заметить, что  $g(x)$  — суперпозиция многочленов  $h(x) = x^3 - 14x^2 + + 49x + 1029$  и  $p(x) = 7x$ . Разложим  $h(x)$  по степеням  $x - 3$ . Получим  $h(x) = 1077 - 8(x - 3) - 5(x - 3)^2 + + (x - 3)^3$ . Но так как  $g(x) = h(7x)$ , то  $g(x) = 7^3 f(x) = = 1077 - 8(7x - 3) - 5(7x - 3)^2 + (7x - 3)^3$ . Отсюда

$$f(x) = \frac{1077}{7^3} - \frac{8(7x - 3)}{7^3} - \frac{5(7x - 3)^2}{7^3} + \frac{(7x - 3)^3}{7^3} = \\ = \frac{1077}{343} - \frac{8}{49} \left( x - \frac{3}{7} \right) - \frac{5}{7} \left( x - \frac{3}{7} \right)^2 + \left( x - \frac{3}{7} \right)^3.$$

В заключение заметим, что программу 5 можно использовать и для определения кратности корня  $c$  мно-

гочлена  $f(x)$ . Найдем, например, кратность корня  $c = 1,1$  многочлена  $f(x) = 300x^5 - 660x^4 + 363x^3 - 200x^2 + 440x - 242$ . Для этого разложим  $f(x)$  по степеням  $x - 1,1$ , используя программу 5. Получим  $f(x) = 199,3(x - 1,1)^2 + + 1089(x - 1,1)^3 + 990(x - 1,1)^4 + 300(x - 1,1)^5$  или  $f(x) = (x - 1,1)^2(199,3 + 1089(x - 1,1) + 990(x - 1,1)^2 + + 300(x - 1,1)^3)$ . Видим, что  $f(x)$  делится на  $(x - 1,1)^2$  и не делится на  $(x - 1,1)^3$ , а значит, кратность корня  $c = 1,1$  данного многочлена равна 2. Более того, мы получили и частное  $s(x)$  (разложенное, правда, по степеням  $x - 1,1$ ) при делении  $f(x)$  на  $(x - 1,1)^2$ :

$$s(x) = 199,3 + 1089(x - 1,1) + 990(x - 1,1)^2 + + 300(x - 1,1)^3.$$

## У п р а ж н е н и я

146. Используя микрокалькулятор, выполните упражнение 86.

147. Используя микрокалькулятор и программу 5, выполните упражнение 65.

## РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

Как уже отмечалось, нахождение корней многочлена, или, что то же самое, решение соответствующего алгебраического уравнения, является одной из важнейших задач теории многочленов. При решении таких задач удобно использовать микрокалькулятор. Покажем, как с его помощью можно решать некоторые уравнения.

Пусть дано квадратное уравнение  $ax^2 + bx + c = 0$ . Его решение микрокалькулятор может осуществить по следующей программе (см. программу 6).

Адрес команды	Команда	Код команды
00	$\Pi \rightarrow X \quad 1$	61
01	$\Pi \rightarrow X \quad 2$	62
02	$\div$	13
03	2	02
04	$\div$	13
05	/—/	0L
06	$X \rightarrow \Pi \quad 5$	45
07	$F \quad X^2$	22
08	$\Pi \rightarrow X \quad 0$	60
09	$\Pi \rightarrow X \quad 2$	62
10	$\div$	13
11	—	11
12	$F \quad X < 0$	5C
13	18	18
14	/—/	0L
15	$F \quad \sqrt{\quad}$	21
16	5	05
17	C/Π	50
18	$F \quad \sqrt{\quad}$	21
19	$X \rightarrow \Pi \quad 3$	43
20	$\Pi \rightarrow X \quad 5$	65
21	+	10
22	$X \rightarrow \Pi \quad 7$	47
23	$\Pi \rightarrow X \quad 5$	65
24	$\Pi \rightarrow X \quad 3$	63
25	—	11
26	7	07
27	C/Π	50

После внесения программы 6 в программную память микрокалькулятора нужно записать коэффициенты  $a$ ,  $b$ ,  $c$  уравнения в РП2, РП1, РП0 соответственно и запустить программу нажатием клавиш В/О С/П. Известно, что квадратное уравнение с действительными коэффициентами (а мы рассматриваем только такой случай) имеет либо два действительных корня (они могут быть и равными), либо два комплексно-сопряженных корня. Если данное уравнение имеет два действительных корня, то через несколько секунд работы микрокалькулятор найдет их и на индикаторе появится число 7. При этом первый корень находится в РУ, и его можно вывести на индикатор, нажав клавишу  $\leftrightarrow$ . Второй же корень помещен в РП7 и его можно вызвать на индикатор нажатием клавиш  $\Pi \rightarrow X$  7. Если же уравнение имеет комплексные корни, то после его решения на индикаторе микрокалькулятора появится число 5. Действительная часть одного из корней при этом находится в РП5, а коэффициент при мнимой части — в РУ. Так как корни комплексно-сопряженные, мы легко находим и второй корень.

Внесем программу 6 в программную память микрокалькулятора и решим, например, уравнение  $x^2 - 10x + 16 = 0$ . Для этого запишем коэффициенты  $a = 1$ ,  $b = -10$ ,  $c = 16$  в РП2, РП1, РП0 соответственно и запустим программу. Через 6—7 с работы микрокалькулятора на индикаторе появится число 7. Это означает, что исходное уравнение имеет два действительных корня, один из которых находится в РУ, а второй — в РП7. Нажимаем клавишу  $\leftrightarrow$  и получаем на индикаторе число 2 (это первый корень). Нажав затем клавиши  $\Pi \rightarrow X$  7, вызовем на индикатор микрокалькулятора второй корень — число 8.

Решим теперь уравнение  $x^2 + 6x + 34 = 0$ . Запишем его коэффициенты в соответствующие регистры памяти и запустим программу. Через 6—7 с на индикаторе

появится число 5. Значит, корни рассматриваемого уравнения — комплексные числа, и, как мы уже говорили, действительная часть одного из корней находится в РП5, а коэффициент при мнимой части — в РУ. Вызовем их поочередно на индикатор нажатием соответствующих клавиш. Получим, что действительная часть корня равна  $-3$ , а коэффициент при мнимой —  $5$ . Таким образом, один из корней равен  $-3 + 5i$ . Тогда вторым корнем будет сопряженное число  $-3 - 5i$ .

При решении квадратных уравнений в большинстве случаев микрокалькулятор выдает лишь приближенные значения корней. С причинами этого вы без труда разберетесь сами.

Рассмотрим теперь уравнение третьей степени  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ . Если один корень  $x_1$  этого уравнения известен, то, разделив его левую часть на  $x - x_1$ , можно свести поиск остальных корней к решению квадратного уравнения. Но микрокалькулятор умеет делить многочлен на линейный двучлен и решать квадратные уравнения по уже известным нам программам. Значит, совсем нетрудно научить его выполнять эти две операции последовательно, одну за другой. Мы сейчас и сделаем это в предположении, что коэффициенты  $a, b, c, d$  и известный корень  $x_1$  — действительные числа (рассматриваемое уравнение, как вы помните, обязательно имеет действительный корень), представимые конечными десятичными дробями. Научить микрокалькулятор выполнять какую-либо работу — это значит составить для него соответствующую программу. Запишем программу, по которой можно решить поставленную задачу (см. программу 7).

В данном случае после внесения программы 7 в программную память микрокалькулятора нужно коэффициенты  $a, b, c, d$  записать в РП4, РП3, РП2, РПd соответственно, набрать на клавиатуре известный корень  $x_1$



Адрес команды	Команда	Код команды
00	$X \rightarrow \Pi \text{ с}$	4Г
01	4	04
02	$X \rightarrow \Pi \text{ 0}$	40
03	$X \rightarrow \Pi \text{ 1}$	41
04	$\Pi \rightarrow X \text{ 4}$	64
05	$\Pi \rightarrow X \text{ с}$	6Г
06	$\times$	12
07	$\Pi \rightarrow X \text{ 0}$	60
08	2	02
09	—	11
10	$F \text{ } X \neq 0$	57
11	18	18
12	$\leftrightarrow$	14
13	$K \text{ } \Pi \rightarrow X \text{ 0}$	Г0
14	+	10
15	$K \text{ } X \rightarrow \Pi \text{ 1}$	L1
16	БП	51
17	05	05
18	$\leftrightarrow$	14
19	$\Pi \rightarrow X \text{ d}$	6С
20	+	10
21	$F \text{ } X \neq 0$	57
22	25	25
23	0	00
24	$\div$	13

Адрес команды	Команда	Код команды
25	$\Pi \rightarrow X \ 3$	63
26	$\Pi \rightarrow X \ 4$	64
27	$\div$	13
28	2	02
29	$\div$	13
30	/—/	0L
31	$X \rightarrow \Pi \ 5$	45
32	F $X^2$	22
33	$\Pi \rightarrow X \ 2$	62
34	$\Pi \rightarrow X \ 4$	64
35	$\div$	13
36	—	11
37	F $X < 0$	5C
38	43	43
39	/—/	0L
40	F $\sqrt{\quad}$	21
41	5	05
42	C/ $\Pi$	50
43	F $\sqrt{\quad}$	21
44	$X \rightarrow \Pi \ 6$	46
45	$\Pi \rightarrow X \ 5$	65
46	+	10
47	$X \rightarrow \Pi \ 7$	47
48	$\Pi \rightarrow X \ 5$	65
49	$\Pi \rightarrow X \ 6$	66
50	—	11
51	7	07
52	C/ $\Pi$	50

и запустить программу нажатием клавиш В/О С/П. Если два других корня данного кубического уравнения — действительные, то через несколько секунд на индикаторе высветится число 7. При этом искомые корни находятся в РУ и РП7.

Если же искомые корни комплексные (они сопряжены), то на индикаторе высветится число 5; действительная часть одного из них при этом находится в РП5, а коэффициент при мнимой части — в РУ.

Внесем программу 7 в программную память микрокалькулятора и решим уравнение  $x^3 - 15x^2 + 68x - 96 = 0$ , если один из его корней  $x_1 = 3$ . Для этого запишем коэффициенты  $a = 1$ ,  $b = -15$ ,  $c = 68$ ,  $d = -96$  в РП4, РП3, РП2, РПd соответственно, наберем на клавиатуре число 3 и запустим программу. Через несколько секунд на индикаторе появится число 7. Это означает, что оба искомых корня действительны и находятся в РУ и РП7. Вызвав их поочередно на индикатор, получим:  $x_2 = 4$ ,  $x_3 = 8$ .

Заметим, что если ошибочно набрать на клавиатуре число, которое не является корнем данного уравнения, и запустить программу, то микрокалькулятор сообщит об этом словом Ёггog на индикаторе.

Таким образом, микрокалькулятор проверяет, является ли введенное с клавиатуры число корнем. Если да, то он ищет остальные корни. Если же нет, то прекращает работу и на индикаторе высвечивается слово Ёггog. Значит, в микрокалькулятор ни в коем случае нельзя вводить приближенные значения исходных данных (коэффициентов уравнения, его известного корня). Ведь тогда, как мы убедились ранее, микрокалькулятор может не воспринять введенное число в качестве корня и отказаться решать уравнение.

Если некоторые коэффициенты исходного уравнения непредставимы в виде конечных десятичных дробей, то

его можно легко свести к уравнению с целыми коэффициентами. Например, умножая обе части уравнения  $x^3 - \frac{1}{7}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{5} = 0$  на 70, получаем  $70x^3 - 10x^2 + 35x + 42 = 0$ .

В случае же, когда известный корень  $x_1$  непредставим в виде конечной десятичной дроби, нам поможет утверждение, которое мы ранее доказали для многочленов, а сейчас переформулируем для кубических уравнений.

*Число  $l/m$  является корнем уравнения  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  тогда и только тогда, когда  $l$  является корнем уравнения  $ax^3 + bmx^2 + cm^2x + dm^3 = 0$ .*

Используем это утверждение для решения уравнения  $3x^3 - 10x^2 + 9x - 2 = 0$  по известному корню  $x_1 = 1/3$ . Тогда число 1 является корнем уравнения  $3x^3 - 10 \cdot 3x^2 + 9 \cdot 3^2x - 2 \cdot 3^3 = 0$ . Последнее же уравнение по известному корню можно решить с помощью микрокалькулятора. Получим, что его корнями являются числа 3 и 6. А тогда, по нашему утверждению, чтобы найти корни  $x_2, x_3$  исходного уравнения, нужно полученные корни вспомогательного уравнения разделить на 3. В результате имеем:  $x_2 = 1, x_3 = 2$ .

Подчеркиваем еще раз, что все наши рассуждения велись в предположении, что и исходные данные, и результаты вычислений микрокалькулятора (промежуточные и конечные) полностью помещаются на его индикаторе.

## У п р а ж н е н и я

148. Используя микрокалькулятор, решите следующие квадратные уравнения:

а)  $x^2 + x - 30 = 0$ ; б)  $3x^2 - 7x + 2 = 0$ ; в)  $x^2 + \frac{1}{5}x - \frac{1}{2} = 0$ .

149. Используя микрокалькулятор, решите следующие кубические уравнения, если один из их корней  $x_1$  известен:

а)  $2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = 0$ ,  $x_1 = 1/2$ ;

б)  $x^3 - \frac{13}{3}x^2 + \frac{8}{3}x - 4 = 0$ ,  $x_1 = \frac{2}{3}$ .

## УМНОЖЕНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ

Микрокалькулятор способен выполнить и такую громоздкую операцию, как умножение многочленов. В этом случае можно использовать программу 8.

Пусть программа 8 уже записана в программную память микрокалькулятора и требуется перемножить многочлены  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  и  $g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0$ . Обозначим  $f(x)g(x) = c_{m+n} x^{m+n} + c_{m+n-1} x^{m+n-1} + \dots + c_1 x + c_0$ . С учетом возможностей микрокалькулятора степень одного из сомножителей должна быть не выше, чем 4. Пусть, для определенности, ст.  $g(x) \leq 4$ . Тогда исходные данные в регистрах памяти располагаются следующим образом:  $b_0$  записывается в РП2,  $b_1$  — в РП3,  $b_2$  — в РП4, ..., число  $k = \text{ст. } g(x) + 3$  — в РПс (обратите внимание, в регистры памяти записываются данные именно того сомножителя, степень которого не выше, чем 4). Далее, на клавиатуре набираем коэффициент  $a_n$  второго сомножителя и запускаем программу, нажав клавиши В/О С/П. Через некоторое время на индикаторе высветится число. Это коэффициент  $c_{m+n}$  произведения. Записав его, наберем на клавиатуре следующий коэффициент  $a_{n-1}$  сомножителя  $f(x)$  и снова запустим программу нажатием клавиш В/О С/П. Через какое-то время на индикаторе появится число — это  $c_{m+n-1}$ . Снова набираем на клавиатуре  $a_{n-2}$  и вновь нажимаем клавиши В/О С/П. Микрокалькулятор после этого выдаст на индикатор следующий коэффициент  $c_{m+n-2}$  произведения и т. д. Таким образом, вводя

Адрес команды	Команда	Код команды
00	$X \rightarrow \Pi d$	4Г
01	$\Pi \rightarrow X c$	6С
02	$X \rightarrow \Pi 1$	41
03	1	01
04	2	02
05	$X \rightarrow \Pi 0$	40
06	$\Pi \rightarrow X 1$	61
07	2	02
08	—	11
09	$F X \neq 0$	57
10	19	19
11	$\Pi \rightarrow X d$	6Г
12	$K \Pi \rightarrow X 1$	Г1
13	$\times$	12
14	$K \Pi \rightarrow X 0$	Г0
15	+	10
16	$K X \rightarrow \Pi B \uparrow$	LE
17	БП	51
18	06	06
19	$\Pi \rightarrow X b$	6L
20	$X \rightarrow \Pi d$	4Г
21	$\Pi \rightarrow X a$	6—
22	$X \rightarrow \Pi b$	4L
23	$\Pi \rightarrow X 9$	69
24	$X \rightarrow \Pi a$	4—

Адрес команды	Команда	Код команды
25	$\Pi \rightarrow X$ 8	68
26	$X \rightarrow \Pi$ 9	49
27	$\Pi \rightarrow X$ 7	67
28	$X \rightarrow \Pi$ 8	48
29	0	00
30	$X \rightarrow \Pi$ 7	47
31	$\Pi \rightarrow X$ d	6Г
32	С/П	50

последовательно коэффициенты  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$  сомножителя  $f(x)$  и запуская программу нажатием клавиш В/О С/П, мы получаем коэффициенты  $c_{m+n}, c_{m+n-1}, \dots, c_m$  произведения (введя свободный член  $a_0$  сомножителя  $f(x)$ , получим коэффициент  $c_m$ ). Остальные коэффициенты  $c_{m-1}, c_{m-2}, \dots, c_1, c_0$  (их не более четырех, ибо  $m \leq 4$ ) будут находиться в РПб, РПа, РП9, РП8 соответственно (если, например,  $m = 1$ , то  $c_0$  находится в РПб; если  $m = 2$ , то  $c_1, c_0$  находятся в РПб и РПа соответственно; если  $m = 3$ , то  $c_2, c_1, c_0$  находятся в РПб, РПа, РП9 соответственно; если  $m = 4$ , то  $c_3, c_2, c_1, c_0$  находятся в РПб, РПа, РП9, РП8 соответственно).

Итак, пусть программа 8 уже записана в программную память микрокалькулятора. Перемножим многочлены  $f(x) = 3,4x^5 - 2,3x^3 + 2,1x^2 - 1,8x + 2,7$  и  $g(x) = 1,2x^2 + 1,1$ . Обозначим  $f(x)g(x) = c_7x^7 + c_6x^6 + c_5x^5 + c_4x^4 + c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0$ . Так как ст.  $g(x) = 2 < 4$ , то данные многочлена  $g(x)$  записываем в следующие регистры памяти:  $b_0 = 1,1$ ,  $b_1 = 0$ ,  $b_2 = 1,2$  — в РП2, РП3, РП4

соответственно, число  $k = \text{ст. } g(x) + 3 = 5$  — в РПс. Далее, необходимо позаботиться о том, чтобы все остальные регистры памяти были чистыми, т. е. чтобы в каждом из них находилось число 0.

Теперь набираем на клавиатуре коэффициент  $a_5 = 3,4$  сомножителя  $f(x)$  и запускаем программу нажатием клавиш В/О С/П. Через 20 с на индикаторе микрокалькулятора высветится число 4,08 (т. е. коэффициент  $c_7$  произведения). После этого набираем на клавиатуре следующий коэффициент  $a_4 = 0$  многочлена  $f(x)$  и снова нажимаем клавиши В/О С/П. Опять же через 20 с на индикаторе появится число 0. Это  $c_6$ . Далее набираем  $a_3 = -2,3$ , нажимаем клавиши В/О С/П и получаем, что  $c_5 = 0,98$ . Действуя таким образом, находим, что  $c_4 = 2,52$ ,  $c_3 = -4,69$ ,  $c_2 = 5,55$ . Остальные коэффициенты  $c_1, c_0$  извлекаем из регистров РПб и РПа соответственно и получаем, что  $c_1 = -1,98$ ,  $c_0 = 2,97$ . Таким образом,  $f(x)g(x) = 4,08x^7 + 0,98x^5 + 2,52x^4 - 4,69x^3 + 5,55x^2 - 1,98x + 2,97$ .

Пусть теперь нужно перемножить многочлены  $f(x) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{2}x + 1$  и  $g(x) = x^4 + \frac{2}{7}x + \frac{3}{5}$ . Здесь оба многочлена имеют степень не выше четвертой, поэтому в регистры памяти можно записывать данные любого из них. Но коэффициенты и одного, и другого многочленов не все представимы в виде конечных десятичных дробей, а значит, в регистры памяти можно записать лишь их приближенные значения. Тогда и коэффициенты произведения микрокалькулятор вычислит приближенно. Но в данном случае легко получить и точный результат. Для этого рассмотрим многочлены  $6f(x) = 4x^2 - 3x + 6$  и  $35g(x) = 35x^4 + 10x + 21$ . Такие многочлены микрокалькулятор легко перемножит, а, зная произведение  $6f(x) \cdot 35g(x) = 210f(x)g(x)$ , без труда можно получить и  $f(x)g(x)$ .



## Упражнения

150. Используя микрокалькулятор, найдите произведение многочленов  $f(x)$  и  $g(x)$ , если:

а)  $f(x) = 2,3x^4 + 7,1x^2 - 2,8x + 4,7$ ,  $g(x) = 2,7x^5 - 3,4x^4 + 1,8x^2 - 8,3x + 1,2$ ;

б)  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{5}x^2 - \frac{4}{9}x + 1$ ,  $g(x) = \frac{1}{2}x^5 - \frac{2}{7}x^3 + \frac{2}{3}x^2 - x + 2$ .

### О ПРОГРАММИРУЕМЫХ МИКРОКАЛЬКУЛЯТОРАХ

Микрокалькулятор «Электроника МК-54» является надежным помощником при работе с многочленами. Программы, приведенные в данной книге, написаны именно для этого микрокалькулятора. Но кроме него имеются и другие модели программируемых микрокалькуляторов, например «Электроника БЗ-34», «Электроника МК-61».

Отметим, что все записанные выше программы пригодны и для микрокалькулятора «Электроника БЗ-34». При использовании их на этом микрокалькуляторе следует лишь помнить, что его клавиши  $\overrightarrow{X\bar{U}}$ ,  $\uparrow$ , П, ИП эквивалентны соответственно клавишам  $\overleftarrow{\leftrightarrow}$ ,  $V\uparrow$ ,  $X\rightarrow П$ ,  $П\rightarrow X$  микрокалькулятора МК-54.

Что касается микрокалькулятора МК-61, то программы 6 и 7 пригодны и для него. Остальные же программы использовать в том виде, в каком они здесь приведены, на МК-61 нельзя. Дело в том, что в этих программах используются команды  $K П\rightarrow X V\uparrow$  и  $K X\rightarrow П V\uparrow$ , которые на МК-61 действуют иначе, чем на МК-54, т. е. не так, как предусмотрено данными программами. Однако эти программы можно немного «подправить» так, чтобы

они стали пригодными и для МК-61. Покажем сейчас, как это сделать.

По команде  $K \Pi \rightarrow X \nabla$  микрокалькулятор МК-54 вызывает в РХ (на индикатор) число из РП, номер которого указан в РПО. По команде  $K X \rightarrow \Pi \nabla$  он записывает число из РХ в РП, номер которого указан в РПО. Напомним, что на МК-61 эти команды действуют иначе.

И на МК-54, и на МК-61 одинаково действуют команды  $K \Pi \rightarrow X 0$  и  $K X \rightarrow \Pi 0$ . По первой из них микрокалькулятор уменьшает содержимое РПО на 1 и вызывает в РХ число из РП, номер которого содержится теперь в РПО. Например, если в РПО записано число 6, то по команде  $K \Pi \rightarrow X 0$  в РХ вызывается число из РП5. Аналогично по второй команде содержимое РПО уменьшается на 1 и число из РХ записывается в РП, номер которого содержится теперь в РПО.

Таким образом, команды  $K \Pi \rightarrow X \nabla$  и  $K X \rightarrow \Pi \nabla$  действуют аналогично командам  $K \Pi \rightarrow X 0$  и  $K X \rightarrow \Pi 0$ , различаясь лишь тем, что не изменяют содержимого РПО. Следовательно, учитывая, что в процессе выполнения программы 1 степень многочлена  $f(x)$  из РПс переписывается в РПО (см. адреса 01 и 02), эту программу можно изменить так: команду  $K \Pi \rightarrow X \nabla$ , записанную по адресу 03, заменить командой  $K \Pi \rightarrow X 0$ , но при этом, вводя исходные данные в регистры памяти, в РПс записывать не степень  $f(x)$ , а число на единицу большее, т. е. число  $1 + \text{ст. } f(x)$ . После такой поправки программа 1 становится пригодной и для МК-61, и для МК-54.

Точно также можно «подправить» и программу 3.

Что касается программы 2, то здесь дело обстоит несколько сложнее. В этом случае придется внести три поправки. Первая точно такая же, как и в случае программы 1. (Не забудьте, что теперь в РПс нужно записывать число  $1 + \text{ст. } f(x)$ .) Далее, исходя из сравнения действий команд  $K X \rightarrow \Pi \nabla$  и  $K X \rightarrow \Pi 0$ , команду  $K X \rightarrow \Pi \nabla$ ,

записанную по адресу 14, заменим серией таких команд:

$X \rightarrow \text{Па} \quad \text{Па} \rightarrow X01 + X \rightarrow \text{П}0 \quad \text{Па} \rightarrow X \text{а} \quad \text{К} X \rightarrow \text{П}0$

Это вторая поправка. И, наконец, третья поправка состоит в следующем. В программе 2 по адресу 10 записан адрес перехода 17, т. е. указан переход на команду  $\leftrightarrow$ . Но теперь, после замены команды по адресу 14 серией команд, адрес команды  $\leftrightarrow$  изменится на 23. Значит, адрес перехода 17 нужно заменить на 23.

Вот теперь наша программа пригодна и для МК-61, и для МК-54. Заметим только, что в этом случае степень многочлена  $f(x)$  не должна превышать числа 9, ибо мы в программе задействовали еще один регистр памяти — РПа.

Аналогично «подправляются» и все остальные программы. Следует лишь иметь в виду, что команда  $\text{К Па} \rightarrow X \text{В} \uparrow$  в рассмотренных программах эквивалентна серии таких команд на МК-61 и на МК-54:

$\text{Па} \rightarrow X01 + X \rightarrow \text{П}0 \quad \text{К Па} \rightarrow X0$

(Не забывайте только при замене команды серией команд просмотреть адреса переходов, они могут измениться.)

Одним из недостатков программ, приведенных в книге, является то, что они предусматривают ручной ввод данных в микрокалькулятор. При этом следует постоянно помнить, какие данные и в какие регистры памяти нужно записать. Между тем можно предусмотреть ввод данных в самой программе, т. е. автоматизировать его. С некоторыми рекомендациями по этому поводу читатель может познакомиться в книге Ю. В. Пухначева, И. Д. Данилова «Микрокалькуляторы для всех» (М., 1986).

В заключение заметим, что предложенные варианты программ и варианты их «подправки», конечно, не единственны. Другие варианты, возможно лучшие, предоставляем найти читателю.

## ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

3. а) Решение. Если  $a^2 - 4 \neq 0$ , т. е.  $a \neq \pm 2$ , то ст.  $f(x) = 3$ . Осталось рассмотреть случаи  $a = -2$  и  $a = 2$ . Если  $a = -2$ , то  $f(x) = -4x^2 + 3$ , т. е. ст.  $f(x) = 2$ . Если  $a = 2$ , то  $f(x) = 3$ , т. е. ст.  $f(x) = 0$ ; б) при  $a = 1$  ст.  $f(x) = 1$ , а при  $a = 2$  ст.  $f(x) = 2$ , при  $a \neq 1$  и  $a \neq 2$  ст.  $f(x) = 3$ ; в) при  $a = 0$  степень не определена, ибо  $f(x)$  — нулевой, при  $a = -1$  ст.  $f(x) = 0$ , при  $a = 1$  ст.  $f(x) = 1$ , при  $a \neq \pm 1$  и  $a \neq 0$  ст.  $f(x) = 2$ .

4.  $f(x) = h(x)$ ,  $g(x) = s(x)$ ,  $p(x) = q(x)$ .

6. а) Решение. Многочлен второй степени имеет вид  $f(x) = ax^2 + bx + c$ . Вычислив  $f(1)$ ,  $f(2)$ ,  $f(3)$ , получим

$$\left. \begin{aligned} a + b + c &= 1, \\ 4a + 2b + c &= 2, \\ 9a + 3b + c &= 5. \end{aligned} \right\}$$

Решив эту систему, найдем:  $a = 1$ ,  $b = -2$ ,  $c = 2$ , т. е.  $f(x) = x^2 - 2x + 2$ .

7. Указание. Представьте  $7345 = 7 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0 + 5$ .

8. Решение. Найдем, например,  $f(g(1))$ . Вычислим сначала  $g(1) = 1^2 - 1 + 2 = 2$ . Тогда  $f(g(1)) = f(2) = 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 3 = 3$ .

9. Решение. Предположим противное, что такой многочлен  $f(x)$  существует и  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$ . Из условия задачи следует, что  $f(\sqrt{2})$ ,  $f(-\sqrt{2})$ ,  $f(\sqrt{3})$ ,  $f(-\sqrt{3})$  — рациональные числа. Найдем указанные значения многочлена  $f(x)$  и обозначим их  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $m_1$ ,  $m_2$  соответственно:

$$\begin{aligned} f(\sqrt{2}) &= 2a + \sqrt{2}b + c = k_1, \\ f(-\sqrt{2}) &= 2a - \sqrt{2}b + c = k_2, \end{aligned}$$

$$f(\sqrt{3}) = 3a + \sqrt{3}b + c = m_1,$$

$$f(-\sqrt{3}) = 3a - \sqrt{3}b + c = m_2.$$

Вычтем из первого равенства второе, а из третьего четвертое. Получим  $2\sqrt{2}b = k_1 - k_2$  и  $2\sqrt{3}b = m_1 - m_2$ . Пусть  $b \neq 0$ . Разделим эти равенства одно на другое. В результате придем к равенству

$$\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{k_1 - k_2}{m_1 - m_2}. \text{ Так как } k_1, k_2, m_1, m_2 \text{ — рациональные числа,}$$

то  $\frac{k_1 - k_2}{m_1 - m_2}$ , а значит, и  $\sqrt{2/3}$  — рациональное число. Получили противоречие. (Случай  $b = 0$  рассмотрите самостоятельно.)

$$11. f(x) = 2x^3 + x^2 - 8x + 4.$$

12. а) Решение. Так как  $c$  — корень, то  $f(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + a_{n-2} c^{n-2} + \dots + a_1 c + a_0 = 0$ . Покажем, что  $-c$  — корень многочлена  $g(x)$ . Вычислим  $g(-c) = a_n (-c)^n - a_{n-1} (-c)^{n-1} + a_{n-2} (-c)^{n-2} - \dots + (-1)^n a_0$ . Если  $n$  — четное число, то  $n-1$  — нечетное,  $n-2$  — четное и т. д. Тогда  $g(-c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + a_{n-2} c^{n-2} + \dots + a_0 = 0$ . Если же  $n$  — нечетное, то  $n-1$  — четное,  $n-2$  — нечетное и т. д. Тогда  $g(-c) = -a_n c^n - a_{n-1} c^{n-1} - a_{n-2} c^{n-2} - \dots - a_0 = -f(c) = 0$ ; б) Решение.

Покажем, что  $\frac{1}{c}$  — корень многочлена  $g(x)$ . В самом деле,

$$g\left(\frac{1}{c}\right) = a_0 \frac{1}{c^n} + a_1 \frac{1}{c^{n-1}} + a_2 \frac{1}{c^{n-2}} + \dots + a_{n-1} \frac{1}{c} + a_n = \\ = \frac{1}{c^n} (a_0 + a_1 c + a_2 c^2 + \dots + a_{n-1} c^{n-1} + a_n c^n) = \frac{1}{c^n} f(c) = 0;$$

в)  $c/2$ .

13. б) Указание. Используйте свойства сложения и умножения многочленов.

15. Решение. Из условий задачи следует, что ст.  $f(x) +$  + ст.  $g(x) = 5$ . Значит, возможны следующие случаи:

$$1) \text{ ст. } f(x) = 0, \text{ ст. } g(x) = 5;$$

$$2) \text{ ст. } f(x) = 1, \text{ ст. } g(x) = 4;$$

$$3) \text{ ст. } f(x) = 2, \text{ ст. } g(x) = 3;$$

$$4) \text{ ст. } f(x) = 3, \text{ ст. } g(x) = 2;$$

$$5) \text{ ст. } f(x) = 4, \text{ ст. } g(x) = 1;$$

$$6) \text{ ст. } f(x) = 5, \text{ ст. } g(x) = 0.$$

Если допустить, что ст.  $f(x) = 0$ , а ст.  $g(x) = 5$ , то легко заметить, что ст.  $(f(x) + g(x)) = 5$ . Значит, случай 1 невозможен. Аналогично убеждаемся, что невозможны и случаи 2, 5, 6. Таким образом, либо ст.  $f(x) = 2$  и ст.  $g(x) = 3$ , либо наоборот.

**16. а) Решение.** Очевидно, что  $\text{ст.}(x^2 - x + 1)^{1985} = 1985 \times \text{ст.}(x^2 - x + 1) = 1985 \cdot 2 = 3970$ . Далее воспользуемся тем, что старший коэффициент произведения равен произведению старших коэффициентов сомножителей. Тогда старший коэффициент данного многочлена равен  $1^{1985} = 1$ . Аналогично вычисляется и свободный член. Найдем теперь сумму коэффициентов данного многочлена. Если  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ , то  $f(1) = a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0$ , т. е. сумма коэффициентов многочлена  $f(x)$  равна  $f(1)$ . В нашем же случае  $f(1) = (1^2 - 1 + 1)^{1985} = 1$ ; в) **Решение.** Старшие члены многочленов  $(2x^2 - 3x + 1)^{1985}$  и  $(2x^3 - 3x - 4)^{1986}$  равны соответственно  $2^{1985} x^{3970}$  и  $2^{1986} x^{5958}$ . Тогда старший член суммы заданных многочленов равен  $2^{1986} x^{5958}$ . Отсюда получаем и старший коэффициент. Далее, легко заметить, что свободный член суммы равен сумме свободных членов слагаемых. Значит, в нашем случае он равен  $1 + 4^{1986}$ . Сумма коэффициентов находится так же, как и в предыдущей задаче.

**17. Указание.** Если  $f(x) = a_n x^n + \dots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ , то  $f(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ ,  $f(-1) = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + (-1)^n a_n$ . Сложим  $f(1)$  и  $f(-1)$ . Получим  $2(a_0 + a_2 + a_4 + \dots) = f(1) + f(-1)$ . Отсюда сумма коэффициентов при четных степенях переменной  $x$  равна  $(f(1) + f(-1))/2$  ( $a_0$  считаем коэффициентом при четной степени). Вычитая теперь из первого равенства второе, получаем, что сумма коэффициентов при нечетных степенях  $x$  равна  $(f(1) - f(-1))/2$ .

$$18. f(x) = (x + 1)(x - 2)(x - 3)(x - 5).$$

$$19. f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)(x - 5) + 7.$$

$$20. f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)(x - 5) + x.$$

$$21. f(g(x)) = 2(x^3 + 2x + 3) - 1; \quad g(f(x)) = (2x - 1)^3 + 2(2x - 1) + 3; \quad f(f(x)) = 2(2x - 1) - 1.$$

**23. а) Решение.** Легко заметить, что нулевой многочлен удовлетворяет условию задачи. Будем считать далее, что искомым многочлен ненулевой. Пусть ст.  $f(x) = n$ . Тогда ст.  $f(f(x)) = n^2$  и ст.  $f^2(x) = 2n$ . Из условия задачи следует, что  $n^2 = 2n$ . Отсюда следует, что либо  $n = 0$ , либо  $n = 2$ . Пусть  $n = 0$ , т. е.  $f(x) = a$ ,  $a \neq 0$ . Тогда  $f(f(x)) = a$ ,  $f^2(x) = a^2$ , а значит,  $a = a^2$ . Отсюда получаем, что либо

$a = 0$ , либо  $a = 1$ . Но  $a \neq 0$ , а следовательно,  $f(x) = 1$ . Пусть теперь  $n=2$ , т. е.  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$ . Тогда  $f(f(x)) = a(ax^2 + bx + c)^2 + b(ax^2 + bx + c) + c = a^3x^4 + 2a^2bx^3 + (ab^2 + 2a^2c + ab)x^2 + (2abc + b^2)x + ac^2 + bc + c$ ,  $f^2(x) = (ax^2 + bx + c)^2 = a^2x^4 + 2abx^3 + (b^2 + 2ac)x^2 + 2bcx + c^2$ , и из равенства  $f(f(x)) = f^2(x)$  следует:

$$\left. \begin{aligned} a^3 &= a^2, \\ 2a^2b &= 2ab, \\ ab^2 + 2a^2c + ab &= b^2 + 2ac, \\ 2abc + b^2 &= 2bc, \\ ac^2 + bc + c &= c^2. \end{aligned} \right\}$$

Учитывая, что  $a \neq 0$ , легко получаем  $a = 1$ ,  $b = c = 0$ , т. е.  $f(x) = x^2$ . Итак, если  $f(x)$  удовлетворяет условию задачи, то либо  $f(x) = 0$ , либо  $f(x) = 1$ , либо  $f(x) = x^2$ ; б) Решение. Во-первых, заметим, что нулевой многочлен удовлетворяет нашему условию. Будем теперь искать ненулевой многочлен  $f(x)$ , для которого  $f(2x) = 2f(x)$ . Пусть  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ,  $a_n \neq 0$ . Тогда  $f(2x) = 2^n a_n x^n + 2^{n-1} a_{n-1} x^{n-1} + \dots + 2a_1 x + a_0$ ,  $2f(x) = 2a_n x^n + 2a_{n-1} x^{n-1} + \dots + 2a_1 x + 2a_0$ . Отсюда следует, что  $a_0 = 2a_0$ , т. е.  $a_0 = 0$ . Далее,  $2^n a_n = 2a_n$ , и так как  $a_n \neq 0$ , то  $n = 1$ . Следовательно, ст.  $f(x) = 1$  и, как мы только что показали, его свободный член равен 0. Значит, искомый многочлен  $f(x)$  имеет вид  $f(x) = ax$ ,  $a \neq 0$ . Легко проверить, что этот многочлен удовлетворяет условию задачи.

24. д) Решение. Так как  $f(x) : g(x)$ , то  $f(x) = g(x)s(x)$  для некоторого многочлена  $s(x)$ . Тогда ст.  $f(x) = \text{ст. } g(x) + \text{ст. } s(x)$ . Так как ст.  $f(x) = \text{ст. } g(x)$ , то ст.  $s(x) = 0$ . Таким образом,  $s(x) = c$  и  $f(x) = cg(x)$ ; е) Решение. Из  $f(x) : g(x)$  и  $g(x) : f(x)$  следует, что  $f(x) = g(x)s_1(x)$  и  $g(x) = f(x)s_2(x)$ . Подставив выражение для  $g(x)$  в первое равенство, получим  $f(x) = f(x)s_1(x)s_2(x)$ . Тогда ст.  $f(x) = \text{ст. } f(x) + \text{ст. } (s_1(x)s_2(x))$ , а значит, ст.  $(s_1(x)s_2(x)) = 0$ , ст.  $s_1(x) + \text{ст. } s_2(x) = 0$ . Последнее равенство возможно лишь в том случае, когда ст.  $s_1(x) = \text{ст. } s_2(x) = 0$ . Значит,  $s_1(x) = c$ , а тогда  $f(x) = cg(x)$ .

26. а) Не делится. Решение. Например,  $f(x) = (x^2 - 1)(x - 3)$  делится на  $g(x) = (x - 1)(x - 3)$  и на  $h(x) = (x + 1)(x - 3)$ , но не делится на  $g(x)h(x) = (x^2 - 1)(x - 3)^2$ ; б) Не делится. Решение. Например, если  $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = -1$ , то  $f(x) + g(x) = x^2 - 1$  делится на  $h(x) = x + 1$ , а  $g(x)$  не делится на  $h(x)$ ; в) Не делится. Решение. Например,  $f(x) = (x - 1)(x + 1)$  делится сам на себя, но ни один из сомножителей на  $f(x)$  не делится.

27. Решение. Имеем  $f(x) = g(x)s(x)$ . Отсюда  $f(c) = g(c)s(c)$ . Но  $g(c) = 0$ , а значит, и  $f(c) = 0$ .

30. а)  $p = -1$ ,  $q = 0$ ; б)  $p = -1$ ,  $q = 0$ ; в)  $p = q = 1$ .

31.  $a_1 = -1$ ,  $b_1 = 0$ ;  $a_2 = 0$ ,  $b_2 = \pm \sqrt{2}$ .

32. а)  $f(x) = (x+2)(x^2 - x - 1)$ ; б)  $f(x) = (2x-1)(x^2 - 3x + 1)$ ; в)  $f(x) = (x-1)^2(x^2 + 3x + 1)$ . (Указание. Найдите сначала разложение  $f(x)$  на множители второй степени.)

34.  $a = -2$ .

35. а)  $a = 0$ ,  $b = -1$ ; б)  $a_1 = 0$ ,  $b_1 = -8$ ;  $a_2 = \pm 3$ ,  $b_2 = 1$ .

36.  $a = 1$ ,  $b = 0$ .

37. Указание. Разделите «углом»  $f(x)$  на  $g(x)$  с остатком и убедитесь, что независимо от  $a$  остаток отличен от нуля.

38. Решение. Имеем  $f(x) = g(x)s(x) + r(x)$  и либо  $r(x) = 0$ , либо  $\text{ст. } r(x) < \text{ст. } g(x) = 4$ . Так как  $\text{ст. } s(x) = \text{ст. } f(x) - \text{ст. } g(x) = 6$ , то  $\text{ст. } r(x) < \text{ст. } s(x)$ . Тогда из исходного равенства следует, что  $r(x)$  — остаток, а  $g(x)$  — неполное частное при делении  $f(x)$  и  $s(x)$ .

39. Решение. Имеем  $f(x) = g(x)s(x) + r(x)$  и либо  $r(x) = 0$ , либо  $\text{ст. } r(x) < \text{ст. } g(x)$ . Отсюда  $af(x) = bg(x)\left(\frac{a}{b}s(x)\right) + ar(x)$ . Ясно, что либо  $ar(x) = 0$ , либо  $\text{ст. } ar(x) < \text{ст. } bg(x)$ . Значит, искомым остатком равен  $ar(x)$ , а неполное частное —  $\frac{a}{b}s(x)$ .

40. Решение. Имеем  $f(x) = g(x)(x^2 + 1) + x^3 + 5x$ . Разделив  $x^3 + 5x$  на  $x^2 + 1$  с остатком, получим  $x^3 + 5x = (x^2 + 1)x + 4x$ . Тогда  $f(x) = g(x)(x^2 + 1) + (x^2 + 1)x + 4x$  или  $f(x) = (x^2 + 1)(g(x) + x) + 4x$ . Таким образом, искомым остатком равен  $4x$ .

41. Решение. Имеем  $f(x) = g(x)s(x) + 2x^2 - x + 1$ . Отсюда  $f^2(x) = g^2(x)s^2(x) + 2g(x)s(x)(2x^2 - x + 1) + (2x^2 - x + 1)^2$ , или  $f^2(x) = g(x)(g(x)s^2(x) + 2s(x)(2x^2 - x + 1)) + (2x^2 - x + 1)^2$ . Так как  $\text{ст. } (2x^2 - x + 1)^2 = 4 < \text{ст. } g(x)$ , то  $(2x^2 - x + 1)^2$  — искомым остатком.

42. Решение. Имеем  $f(x) = g(x)s(x) + 2$  и  $f^2(x) = g^2(x)s_1(x) + 4$ . Из первого равенства следует  $f^2(x) = g^2(x)s^2(x) + 4g(x)s(x) + 4$ . Приравняв оба выражения для  $f^2(x)$  имеем  $g^2(x)s_1(x) = g^2(x)s^2(x) + 4g(x)s(x)$ . После сокращения последнего равенства на  $g(x)$  (так как  $g(x) \neq 0$ ) получаем  $g(x)s_1(x) = g(x)s^2(x) + 4s(x)$ . Отсюда следует, что  $g(x)s^2(x) + 4s(x)$  делится на  $g(x)$ . Так как сумма и первое слагаемое делятся на  $g(x)$ , то и второе слагаемое, т. е.  $4s(x)$ , делится на  $g(x)$ . Но тогда  $s(x) : g(x)$ , т. е.  $s(x) = g(x)h(x)$  для некоторого



многочлена  $h(x)$ . Подставив последнее выражение  $s(x)$  в равенство  $f(x) = g(x)s(x) + 2$ , получим  $f(x) = g^2(x)h(x) + 2$ , т. е. искомым остаток равен 2.

43. Решение. Имеем  $f_1(x) = g(x)s_1(x) + r_1(x)$  и либо  $r_1(x) = 0$ , либо ст.  $r_1(x) < \text{ст. } g(x)$ ; аналогично  $f_2(x) = g(x)s_2(x) + r_2(x)$ , и либо  $r_2(x) = 0$ , либо ст.  $r_2(x) < \text{ст. } g(x)$ . Отсюда  $2f_1(x) - 3f_2(x) = g(x)(2s_1(x) - 3s_2(x)) + (2r_1(x) - 3r_2(x))$ . Легко видеть, что ст.  $(2r_1(x) - 3r_2(x)) < \text{ст. } g(x)$ , а значит, мы разделили с остатком  $2f_1(x) - 3f_2(x)$  на  $g(x)$ .

44. а) Решение. Разделив  $f(x)$  на  $g(x)$  с остатком, получим  $f(x) = g(x)s(x) + r(x)$ , где либо  $r(x) = 0$ , либо ст.  $r(x) < \text{ст. } g(x) = 2$ . Отсюда следует, что либо искомым остаток  $r(x)$  — нулевой многочлен, либо ст.  $r(x) \leq 1$ . Во всяком случае он представим в виде  $r(x) = ax + b$ . Теперь имеем  $x^{62} + 4x^{31} + 5 = (x^2 - 1)s(x) + ax + b$ . Многочлены, стоящие в левой и правой частях последнего равенства, равны, а значит, они принимают одни и те же значения при одинаковых значениях переменной  $x$ . Выберем те значения  $x$ , при которых слагаемое в левой части, содержащее  $s(x)$ , равно 0. Такими значениями являются  $x = \pm 1$ . Положив в последнем равенстве  $x = 1$ , получим  $1^{62} - 4 \cdot 1^{31} + 5 = 0 \cdot s(x) + a + b$ , т. е.  $a + b = 2$ . Аналогично, положив  $x = -1$ , получим  $-a + b = 10$ . Таким образом, имеем систему

$$\begin{cases} a + b = 2, \\ -a + b = 10. \end{cases}$$

Отсюда  $a = -4$ ,  $b = 6$ , т. е.  $r(x) = -4x + 6$ .

45.  $-x^2 - \frac{9}{2}x + \frac{3}{2}$ . (Указание. Искомым остаток  $r(x)$  либо

0, либо ст.  $r(x) \leq 2$ . Во всяком случае он имеет вид  $ax^2 + bx + c$  (если, например, остаток — многочлен первой степени, то  $a = 0$ ). Далее см. решение упражнения 44а.)

46. Решение. Имеем  $ax^3 + bx - 1 = (x^3 - 3x + 2)s(x) + 7$ . Положив в этом равенстве последовательно  $x = 1$  и  $x = 2$ , получим систему

$$\begin{cases} a + b = 8, \\ 8a + 2b = 8. \end{cases}$$

Отсюда  $a = -4/3$ ,  $b = 28/3$ .

47. Решение. Разделим «углом»  $f(x)$  на  $g(x)$  с остатком. Получим  $f(x) = g(x)x + 2ax - 4$ . Предположим теперь, что  $c$  — об-

щий корень многочленов  $f(x)$  и  $g(x)$ , т. е.  $f(c) = 0$  и  $g(c) = 0$ . Положим в полученном выше равенстве  $x = c$ . Тогда  $2ac - 4 = 0$  и отсюда следует, что  $c = 2/a$ . Но  $g(c) = g(2/a) = 0$ , т. е.  $\frac{4}{a^2} + \frac{2}{a} - a = 0$  или

$a^3 - 2a - 4 = 0$ . Легко проверить, что  $a = 2$  — решение последнего уравнения. Тогда  $c = 1$ . Таким образом, если существует общий корень, то  $a = 2$  и этот корень равен 1. Осталось убедиться в обратном, что если  $a = 2$ , то 1 — общий корень.

**49. Решение.** Из условия задачи и теоремы Безу следует, что  $f(2) = 15$  и  $f(1) = 0$ . Вычислив  $f(2)$  и  $f(1)$ , получим

$$\left. \begin{aligned} 4a + 2b + ab &= 7, \\ a + b + ab &= -1. \end{aligned} \right\}$$

Осталось решить эту систему. Вычтем из первого уравнения второе. Имеем  $3a + b = 8$ , откуда  $b = 8 + 3a$ . Подставим найденное значение  $b$  во второе уравнение системы. Получим уравнение  $a^2 - 2a - 3 = 0$ , откуда  $a_1 = -1$ ,  $a_2 = 3$ . Из  $b = 8 - 3a$  находим соответствующие значения  $b$ :  $b_1 = 11$ ,  $b_2 = -1$ .

**50. Решение.** Разделим  $f(x)$  на  $x^2 - 1$  с остатком. Остаток  $r(x)$  при этом делении имеет вид  $r(x) = ax + b$ . Тогда  $f(x) = (x^2 - 1)s(x) + ax + b$ . Положим в этом равенстве  $x = 1$ , а затем  $x = -1$ . Имеем  $f(1) = a + b$  и  $f(-1) = -a + b$ . Но по теореме Безу  $f(1) = 3$ , а  $f(-1) = 5$ . Получаем систему

$$\left. \begin{aligned} a + b &= 3, \\ -a + b &= 5. \end{aligned} \right\}$$

Отсюда  $a = -1$ ,  $b = 4$ .

**52. Указание.** Легко проверить, что  $x = 1$  — корень.

**53. а) Решение.** Представим число  $a$  в виде  $a = 3^{60} + 1 = (3^4)^{15} + 1 = 81^{15} + 1$ . Рассмотрим теперь многочлен  $f(x) = x^{15} + 1$ . Так как  $-1$  — его корень, то  $f(x)$  делится на  $x - (-1) = x + 1$ . Тогда  $x^{15} + 1 = (x + 1)s(x)$ , где  $s(x)$  — многочлен с целыми коэффициентами. Положим в этом равенстве  $x = 81$ . Получим  $81^{15} + 1 = 82s(81)$ . Так как  $s(81)$  — целое число, то из последнего равенства и следует, что  $81^{15} + 1$  делится на 82; б) **Указание.** Представьте  $a = 2^{35} + 1 = (2^5)^7 + 1 = 32^7 + 1$  и докажите, что  $a$  делится на 33. Отсюда и будет следовать делимость  $a$  на 11.

**54. Указание.** Обозначьте левую часть данного равенства через  $a$ . Тогда  $a^3 = 2 + a$  или  $a^3 - a - 2 = 0$ . Таким образом,  $a$  — корень многочлена  $f(x) = x^3 - x - 2$ . Легко видеть, что  $x = 1$  — единственный действительный корень этого многочлена.

55. Решение. Так как  $f(x) : (ax + b)$ , то  $f(-b/a) = 0$  (см. упражнение 48). Тогда  $f(-b/a) = g(-b/a)h(-b/a) = 0$ . Отсюда следует, что либо  $g(-b/a) = 0$ , либо  $h(-b/a) = 0$ , а значит, или  $g(x) : (ax + b)$ , или  $h(x) : (ax + b)$ .

56. а)  $f(x) = (x + 3)(x^5 - 3x^4 + 5x^3 - 14x^2 + 40x - 120) + 365$ ;  
 б)  $f(x) = (x + 2)(x^5 - 2x^4 + 4x^3 - 8x^2 + 16x - 32) + 61$ ; в)  $f(x) = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + 1) + 1$ ; г)  $f(x) = (x - 2)(x^3 - 2x + 3)$ .

57. Указание. Так как  $x=1$  и  $x=2$  — корни многочлена  $f(x) = x^4 - 8x^3 + 21x^2 - 22x + 8$ , то  $f(x) : ((x-1)(x-2))$ , т. е.  $f(x) : (x^2 - 3x + 2)$ . Выполнив деление «углом», получим  $f(x) = (x^2 - 3x + 2) \times (x^2 - 5x + 4)$ .

58. Решение. Ясно, что нулевой многочлен удовлетворяет условию задачи. Далее будем предполагать, что искомый многочлен ненулевой. Положим в заданном равенстве  $x=0$ . Получим  $0 = -3f(0)$ , т. е.  $f(0) = 0$ . Пусть теперь  $x = 1$ . Тогда  $1f(0) = -2f(1)$  и так как  $f(0) = 0$ , то  $f(1) = 0$ . Положив в этом же равенстве  $x = 2$ , аналогично имеем  $f(2) = 0$ . (Заметим, что при  $x = 3$ , мы не получим  $f(3) = 0$ .) Таким образом, 0, 1, 2 — корни искомого многочлена  $f(x)$ . Тогда этот многочлен имеет вид  $f(x) = (x - 0)(x - 1)(x - 2)s(x)$ , или  $f(x) = x(x - 1)(x - 2)s(x)$ . Осталось найти  $s(x)$ . Пусть ст.  $s(x) = n$ . Многочлен  $f(x)$  удовлетворяет условию  $xf(x - 1) = (x - 3)f(x)$ . Так как  $f(x - 1) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)s(x - 1)$ , то имеем  $x(x - 1)(x - 2) \times (x - 3)s(x - 1) = (x - 3)x(x - 1)(x - 2)s(x)$ . После сокращения получаем  $s(x - 1) = s(x)$ . Положим последовательно в последнем равенстве  $x = 1, 2, 3, \dots, n, n + 1$ . Тогда  $s(0) = s(1)$ ,  $s(1) = s(2)$ ,  $s(2) = s(3)$ ,  $\dots$ ,  $s(n) = s(n + 1)$ , т. е.  $s(0) = s(1) = s(2) = s(3) = \dots = s(n + 1)$ . Обозначим  $s(0) = c$  и рассмотрим многочлен  $g(x) = c$ . Многочлены  $s(x)$  и  $g(x)$  имеют степени не выше, чем  $n$ , и принимают одинаковые значения при  $n + 1$  значениях переменной  $x$ , а значит, они равны, т. е.  $s(x) = c$ . Таким образом,  $f(x) = cx(x - 1)(x - 2)$ . Легко убедиться, что это и есть искомый многочлен.

59. Решение. Обозначим члены арифметической прогрессии, которую образуют значения  $x$ , через  $c_1, c_2, c_3, \dots$ , а ее разность — через  $d_1$ . Тогда соответствующая арифметическая прогрессия значений многочлена имеет вид:  $f(c_1), f(c_2), f(c_3), \dots$ ; обозначим ее разность  $d_2$ . Рассмотрим многочлен  $g(x) = \frac{d_2}{d_1}x + f(c_1) - \frac{d_2}{d_1}c_1$ .

Имеем:

$$g(c_1) = \frac{d_2}{d_1}c_1 + f(c_1) - \frac{d_2}{d_1}c_1 = f(c_1),$$

$$g(c_2) = \frac{d_2}{d_1}c_2 + f(c_1) - \frac{d_2}{d_1}c_1 = f(c_1) + \frac{d_2}{d_1}(c_2 - c_1) =$$

$$= f(c_1) + \frac{d_2}{d_1} d_1 = f(c_1) + d_2 = f(c_2).$$

Аналогично устанавливается, что  $g(c_3) = f(c_3)$ ,  $g(c_4) = f(c_4)$ , ...,  $g(c_{n+1}) = f(c_{n+1})$ . Таким образом,  $f(x)$  и  $g(x)$  принимают одинаковые значения при  $x = c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ , а значит,  $f(x) = g(x)$ . Тогда ст.  $f(x) = \text{ст. } g(x) \leq 1$  (если  $d_2 = 0$ , то  $g(x)$  — многочлен нулевой степени).

60. Решение. Пусть  $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5$  — такие целые числа, что  $f(c_1) = f(c_2) = f(c_3) = f(c_4) = f(c_5) = 5$ . Рассмотрим многочлен  $g(x) = f(x) - 5$ . Числа  $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5$  являются его корнями, а значит,  $g(x) = f(x) - 5 = (x - c_1)(x - c_2)(x - c_3)(x - c_4)(x - c_5)s(x)$ . Если теперь  $a$  — целый корень многочлена  $f(x)$ , то, положив в последнем равенстве  $x = a$ , получим  $-5 = (a - c_1)(a - c_2)(a - c_3)(a - c_4) \times (a - c_5)s(a)$ . Так как все числа  $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5$  различны, то различны и числа  $a - c_1, a - c_2, a - c_3, a - c_4, a - c_5$ . Следовательно, число  $-5$  имеет по крайней мере пять различных целых делителей, в то время как на самом деле их только четыре:  $\pm 1, \pm 5$ . Пришли к противоречию.

63. а)  $x_1 = 3, x_2 = 2, x_3 = -4, x_4 = 5$ . (Указание. Рассмотрите многочлен  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  и положите  $f(1) = 6, f(-1) = 8, f(-2) = -3, f(3) = 92$ .); б)  $x_1 = 2, x_2 = -1, x_3 = 5, x_4 = 3$ . (Указание. Разделите обе части второго уравнения на 8. После этого оно примет вид  $\frac{1}{8}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + x_4 = \frac{11}{2}$ .)

64.  $f(x) = (x + 2)^2 x^2 (x - 1)^3 (x - 3)$ . (Указание. Очевидно, что  $f(x)$  делится на  $(x + 2)^2$ . Чтобы доказать, что  $f(x)$  не делится на  $(x + 2)^3$ , достаточно доказать, что  $x^2(x - 1)^3(x - 3)$  не делится на  $x + 2$ . Для этого воспользуйтесь результатом упражнения 55.)

68. Ни при каком.

69. а)  $a = -3, b = 3, c = -1$ ; б)  $a = -8/3, b = 2, c = -1/3$ ; в)  $a = -1/3, b = 2, c = -8/3$ .

70. Решение. Выясним, при каких  $a$  и  $b$  многочлен  $f(x)$  имеет  $x = 1$  корнем кратности по крайней мере 2. Разделим  $f(x)$  на  $(x - 1)^2$  по схеме Горнера:

	1	0	0	...	0	0	$a$	$b$
1	1	1	1	...	1	1	$a + 1$	$a + b + 1$
1	1	2	3	...	$n - 2$	$n - 1$	$a + n$	

Тогда

$$\left. \begin{aligned} a + b + 1 &= 0, \\ a + n &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Отсюда  $a = -n$ ,  $b = n - 1$ .

71. а) Решение. Из условий задачи следует, что  $f(x) = (x - c)^k p(x)$ ,  $g(x) = (x - c)^m q(x)$ , где  $p(x)$  и  $q(x)$  не делятся на  $x - c$ . Тогда  $h(x) = f(x)g(x) = (x - c)^{k+m} p(x)q(x)$ . Таким образом,  $h(x) \div (x - c)^{k+m}$ . Докажем, что  $h(x)$  не делится на  $(x - c)^{k+m+1}$ . Для этого достаточно показать, что многочлен  $p(x)q(x)$  не делится на  $x - c$ . Предположим противное, что  $p(x)q(x) \div (x - c)$ . Тогда  $c$  является корнем этого многочлена, т. е.  $p(c)q(c) = 0$ . Значит, либо  $p(c) = 0$ , либо  $q(c) = 0$ , т. е. или  $p(x)$ , или  $q(x)$  делится на  $x - c$ . Пришли к противоречию; б) Решение. Легко получаем, что  $s(x) = f(x) + g(x) = (x - c)^k (p(x) + (x - c)^{m-k} q(x))$ , где  $p(x)$  и  $q(x)$  не делятся на  $x - c$ . Видим, что  $s(x)$  делится на  $(x - c)^k$ . Если предположить, что  $s(x) \div (x - c)^{k+1}$ , то тогда  $p(x) + (x - c)^{m-k} q(x)$  делится на  $x - c$ , а значит,  $p(c) + (c - c)^{m-k} q(c) = 0$ . Отсюда следует, что  $p(c) = 0$ , т. е.  $p(x) \div (x - c)$ . Получили противоречие.

76. Нет. Решение. Например, если  $f(x) = x^2$  и  $g(x) = x^2 + 5$ , то  $f'(x) = g'(x)$ .

77. Решение. Многочлен  $f(x)$  имеет вид  $f(x) = 5 \cdot \frac{1}{5} x^5 + + 18 \cdot \frac{1}{3} x^3 - 4 \cdot \frac{1}{2} x^2 + 3x + a = x^5 + 6x^3 - 2x^2 + 3x + a$ . Из условия  $f(1) = 8$  получаем  $a = 0$ .

78. Решение. Имеем  $f(x) = (x^3 + x + 1)^2 s(x) + x^2 + x + 5$ . Отсюда

$$\begin{aligned} f'(x) &= ((x^3 + x + 1)^2 s(x))' + (x^2 + x + 5)' = \\ &= ((x^3 + x + 1)^2)' s(x) + (x^3 + x + 1)^2 s'(x) + (x^2 + x + 5)' = \\ &= 2(x^3 + x + 1)(3x^2 + 1)s(x) + (x^3 + x + 1)^2 s'(x) + 2x + 1 = \\ &= (x^3 + x + 1)(2(3x^2 + 1)s(x) + (x^3 + x + 1)s'(x)) + 2x + 1. \end{aligned}$$

Видим, что искомый остаток равен  $2x + 1$ .

79. а) Решение. Пусть ст.  $f(x) = n > 2$ . Тогда ст.  $f'(x) = n - 1 > 1$ , и ясно, что ст.  $(f'(x) + x) = n - 1$ , а значит,  $f(x)$  не удовлетворяет заданному условию. Если ст.  $f(x) = 2$ , то ст.  $f'(x) = 1$ , а тогда либо ст.  $(f'(x) + x) = 1$ , либо ст.  $(f'(x) + x) = 0$ , либо  $f'(x) + x = 0$ . Следовательно,  $f(x)$  не удовлетворяет заданному условию. Таким образом, либо ст.  $f(x) = 1$ , либо ст.  $f(x) = 0$ , либо  $f(x) = 0$ . Легко проверить, что последние два случая невозможны. Значит, ст.  $f(x) = 1$ ,

т. е.  $f(x) = ax + b$ ,  $a \neq 0$ . Тогда  $f'(x) = a$ . Из заданного условия следует  $ax + b = x + a$ . Отсюда получаем, что  $a = b = 1$ , т. е.  $f(x) = x + 1$ ; б)  $f(x) = 0$ ; в) Решение. Легко видеть, что нулевой многочлен удовлетворяет заданному условию. Пусть теперь  $f(x) \neq 0$  и ст.  $f(x) = n$ . Тогда ст.  $f'(x) = n - 1$  и ст.  $(f'(x))^m = m(n - 1)$ . Значит,  $n = m(n - 1)$ . Отсюда  $m = n/(n - 1)$ . Так как  $m, n$  — натуральные числа, то последнее равенство возможно лишь при  $n = 2$ , а тогда  $m = 2$ . Таким образом,  $f(x)$  имеет вид  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$ . Следовательно,  $f'(x) = 2ax + b$ . Учитывая, что  $m = 2$ , из условия задачи получаем  $ax^2 + bx + c = (2ax + b)^2$  или  $ax^2 + bx + c = 4a^2x^2 + 4abx + b^2$ . Отсюда

$$\left. \begin{aligned} 4a^2 &= a, \\ 4ab &= b, \\ b^2 &= c. \end{aligned} \right\}$$

Так как  $a \neq 0$ , то из первого уравнения системы имеем  $a = 1/4$ . Тогда  $b = b$ ,  $b^2 = c$ . Значит,  $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + bx + b^2$ , где  $b$  — любое число. Легко проверить, что  $f(x)$  — искомым многочлен.

80. а) Да,  $x = 2$ ; б) Решение. Задача сводится к выяснению вопроса: имеют ли  $f(x) = x^n - 1$  и  $f'(x) = nx^{n-1}$  общий корень. Корнем  $f'(x)$  является  $x = 0$ , и других корней нет. Но  $x = 0$  не является корнем  $f(x)$ , а значит, у  $f(x)$  и  $f'(x)$  общих корней нет. Отсюда и следует, что  $f(x)$  не имеет кратных корней; в) Решение. Легко находим, что  $f'(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + \frac{x}{1!} + 1$ . Тогда

$$f(x) = \frac{x^n}{n!} + f'(x).$$

Если предположить, что  $c$  — общий корень  $f(x)$  и  $f'(x)$ , то из последнего равенства следует  $c^n/n! = 0$ , т. е.  $c = 0$ . Но  $c = 0$  не является корнем  $f(x)$ . Пришли к противоречию. Значит,  $f(x)$  не имеет кратных корней.

81. Решение. Находим производную  $f'(x) = 3x^2 + 10x + 8$  данного многочлена и ее корни  $x = -2$ ,  $x = -4/3$ . Так как  $f(x)$  имеет кратные корни, то либо  $x = -2$ , либо  $x = -4/3$ , либо оба эти числа являются корнями  $f(x)$ . Пусть  $x = -2$  — корень  $f(x)$ . Тогда из  $f(-2) = 0$  следует, что  $a = 4$ . Если же  $x = -4/3$  — корень  $f(x)$ , то аналогично получаем, что  $a = 112/27$ . Таким образом, при  $a = 4$   $f(x)$  имеет кратный корень  $x = -2$ , а при  $a = 112/27$  — кратный корень  $x = -4/3$ . Легко найти и кратности этих корней.

82. а) При  $a = 18$  кратный корень  $x = 3$ , при  $a = 4/27$  кратный корень  $x = -1/3$ . (Указание. См. решение упражнения 81.); б) Ре-

шение. Задача сводится к нахождению значений  $a$ , при которых многочлены  $f(x)$  и  $f'(x)$  имеют общий корень (см. решение упражнения 47). В нашем случае  $f'(x) = 3x^2 + 6x + 3a$ . Разделим  $f(x)$  на  $f'(x)$  с остатком. Получим  $f(x) = f'(x) \left( \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \right) + (2a - 2)x - a - 4$ . Если  $c$  — общий корень многочленов  $f(x)$  и  $f'(x)$ , то  $c$  — корень остатка  $r(x) = (2a - 2)x - a - 4$ , т. е.  $(2a - 2)c - a - 4 = 0$ . Отсюда легко получить, что  $2a - 2 \neq 0$ , а значит,  $c = (a + 4) \times \times (2a - 2)^{-1}$ . Так как  $f'(c) = 0$ , то  $3 \left( \frac{a + 4}{2a - 2} \right)^2 + 6 \frac{a + 4}{2a - 2} + 3a = 0$ .

Выполнив простые преобразования, получим уравнение  $21a^2 + 54a = 0$ . Отсюда  $a = 0$  или  $a = -18/7$ . Если  $a = 0$ , то  $c = -2$ . Осталось проверить, действительно ли число  $-2$  является кратным корнем многочлена  $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$ . В результате проверки получим, что  $-2$  — двукратный корень. Если  $a = -18/7$ , то  $c = -1/5$ . В результате проверки находим, что  $-1/5$  не является корнем многочлена  $f(x) = x^3 + 3x^2 - \frac{54}{7}x - 4$ . Итак, при  $a = 0$  многочлен имеет двукратный корень  $-2$ ; в)  $a = -3$ ,  $k = 3$ ; г)  $a = -4$ ,  $k = 2$ ; д)  $a = 4$ ,  $k = 2$ .

83. Решение. Нужно выяснить, при каких значениях  $a$  и  $b$  многочлен  $f(x)$  имеет кратный корень  $-1$ , т. е. выполняются условия  $f(-1) = 0$  и  $f'(-1) = 0$ . Вычислив  $f(-1)$  и  $f'(-1)$ , получим систему

$$\left. \begin{aligned} a - b &= 0, \\ 6a - 3b &= 17. \end{aligned} \right\}$$

Отсюда  $a = b = 17/3$ .

84. а)  $n$  — любое; б)  $n = 6$ ; в)  $n = 9$ .

85. Решение. Имеем  $f(x) : (x - c)^k$ ,  $k \geq 2$ . Тогда, как известно,  $f'(x) : (x - c)^{k-1}$ . Следовательно,  $(f'(x))^2 : (x - c)^{2k-2}$ . Так как  $k \geq 2$ , то  $2k \geq k + 2$ , или  $2k - 2 \geq k$ . Значит,  $(x - c)^{2k-2} : (x - c)^k$ , а тогда и  $(f'(x))^2 : (x - c)^k$ . В результате получим, что  $(f(x) + (f'(x))^2) : (x - c)^k$ .

86. а)  $f(x) = -50 + 91(x + 2) - 82(x + 2)^2 + 40(x + 2)^3 - 10(x + 2)^4 + (x + 2)^5$ ; б)  $f(x) = -41 + 24(x - 2)^2 + 8(x + 2)^3 + (x + 2)^4$ .

87. Решение. Разложим искомый многочлен по степеням  $x - 2$ . Получим  $f(x) = f(2) + \frac{f'(2)}{1!}(x - 2) + \frac{f''(2)}{2!}(x - 2)^2 +$

$+\frac{f'''(2)}{3!}(x-2)^3$ . Осталось подставить заданные значения многочлена и его производных при  $x=2$ .

89. Решение. Пусть  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ . Тогда  $f(a+b\sqrt{2}) = a_n (a+b\sqrt{2})^n + a_{n-1} (a+b\sqrt{2})^{n-1} + \dots + a_1 (a+b\sqrt{2}) + a_0$ . Раскрыв скобки по формуле бинома Ньютона и приведя подобные члены, получим, что число  $f(a+b\sqrt{2})$  имеет вид  $f(a+b\sqrt{2}) = u + v\sqrt{2}$ , где  $u, v$  — рациональные числа. Так как  $a+b\sqrt{2}$  — корень многочлена  $f(x)$ , то  $u + v\sqrt{2} = 0$ . Если предположить, что  $v \neq 0$ , то в этом случае  $\sqrt{2} = -u/v$  — рациональное число. Но  $\sqrt{2}$  — число иррациональное, а значит,  $v = 0$ . Тогда и  $u = 0$ . Далее легко находим, что  $f(a-b\sqrt{2}) = u - v\sqrt{2}$ , и так как  $u = v = 0$ , то  $f(a-b\sqrt{2}) = 0$ .

90. Решение. Так как  $3-2\sqrt{2}$  — корень многочлена  $f(x)$ , то с учетом результата упражнения 89 и число  $3+2\sqrt{2}$  также корень этого многочлена. Тогда  $f(x)$  делится на  $(x-(3-2\sqrt{2}))(x-(3+2\sqrt{2})) = x^2 - 6x + 1$ . Разделив  $f(x)$  на  $x^2 - 6x + 1$  с остатком, получим  $f(x) = (x^2 - 6x + 1)(x^2 + a - 1) + 6ax + b - a + 1$ . Так как остаток — нулевой многочлен, то отсюда следует, что  $a = 0$  и  $b = -1$ . Таким образом,  $f(x) = x^4 - 6x^3 + 6x - 1 = (x^2 - 6x + 1) \times (x^2 - 1)$ , откуда получаем еще два корня данного многочлена  $\pm 1$ .

91. а)  $1/2$ ; б)  $6/5$ ; в)  $-1, 1/2, 2/3$ ; г)  $3$ .

92. Указание. Воспользуйтесь формулой  $\cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha$ .

93. Решение. Допустим, что уравнение имеет решение в целых числах  $x = a$ ,  $y = b$ , отличных от нуля, т. е.  $a^4 - 3a^2b = b^4$ . Так как  $b \neq 0$ , то разделим обе части полученного равенства на  $b^4$ . Тогда  $(a/b)^4 - 3(a/b)^2 - 1 = 0$ . Таким образом,  $a/b$  — рациональный корень многочлена  $f(t) = t^4 - 3t^2 - 1$  (здесь переменная обозначена буквой  $t$ , так как буква  $x$  уже использована в уравнении). Но, как легко убедиться,  $f(t)$  рациональных корней не имеет. Получили противоречие, а значит, наше допущение неверно.

95. а) Решение. Так как  $f(0)$  — свободный член многочлена  $f(x)$ ,  $f(0)$  делится на  $l$ . Отсюда следует, что  $l$  — нечетное число. Далее, так как  $f(1)$  делится на  $l-m$ , то  $l-m$  — тоже нечетное число. Отсюда следует, что разность  $l-(l-m) = m$  — четное число; б) Решение. Допустим, что  $f(x)$  имеет целый корень  $c$ . Тогда свободный член  $f(0)$  многочлена  $f(x)$  делится на  $c$ . Значит,  $c$  — нечетное число. Но  $f(1)$  делится на  $c-1$ . Следовательно,  $c-1$  — нечетное число.



В этом случае число  $c - (c - 1) = 1$  — четное. Получили противоречие; в) *Указание.* Предположите, что  $c = c/1$  — целый корень многочлена  $f(x)$ . Из того, что  $f(k)$  делится на  $c - k$  и  $f(k + 1)$  делится на  $c - (k + 1)$ , получите противоречие.

96. ж) *Решение.* Обозначим НОД через  $d(x)$ . Так как  $g(x) : d(x)$ , то  $\text{ст.} d(x) \leq \text{ст.} g(x) = 2$ . Значит, НОД имеет степень либо 2, либо 1, либо 0. Пусть  $\text{ст.} d(x) = 2$ . Если старший его коэффициент  $a \neq 1$ , то  $\frac{1}{a} d(x)$  — тоже НОД со старшим коэффициентом 1.

Поэтому можно считать, что старший коэффициент искомого многочлена  $d(x)$  равен 1, т. е.  $d(x) = x^2 + px + q$ . Разделим  $g(x)$  на  $d(x)$  с остатком. Получим  $g(x) = 2 \cdot d(x) + (1 - 2p)x - 3 - 2q$ . Так как  $g(x) : d(x)$ , то остаток при делении  $g(x)$  на  $d(x)$  равен 0, а следовательно,  $p = 1/2$ ,  $q = -3/2$ . Тогда  $d(x) = x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$ . Но лег-

ко проверить, что в этом случае  $f(x)$  не делится на  $d(x)$ . Значит,  $d(x)$  не может иметь степень 2. Пусть  $\text{ст.} d(x) = 1$ . Аналогично предыдущему получаем, что старший коэффициент  $d(x)$  можно считать равным 1, т. е.  $d(x) = x + c$ . Так как  $g(x) : d(x)$ , то остаток при делении  $g(x)$  на  $d(x)$  равен 0, т. е.  $g(-c) = 0$ . Имеем  $2c^2 - c - 3 = 0$ . Отсюда  $c = -1$  или  $c = 3/2$ . Значит, либо  $d(x) = x - 1$ , либо  $d(x) = x + 3/2$ . Далее непосредственно проверяется, что  $f(x) : (x - 1)$  и  $f(x)$  не делится на  $x + 3/2$ . Следовательно,  $d(x) = x - 1$ .

97. а)  $x^2 + 2x + 1$ ; б)  $x^2 + 2x + 4$ ; в)  $x - 3$ .

98. *Решение.* Пусть  $d_1(x)$  и  $d_2(x)$  — различные НОД многочленов  $f(x)$  и  $g(x)$ ,  $d(x)$  — их НОД, найденный с помощью алгоритма Евклида. Тогда  $d_1(x) = c_1 d(x)$ ,  $d_2(x) = c_2 d(x)$  и  $d_1(x) = c_1 d(x) = \frac{c_1}{c_2} c_2 d(x) = \frac{c_1}{c_2} d_2(x)$ .

99. *Решение.* Пусть  $d_1(x)$  — НОД многочленов  $f(x)$  и  $g(x)$ ,  $d(x)$  — их НОД, найденный с помощью алгоритма Евклида. Тогда  $d_1(x) = c d(x)$ . Если  $h(x)$  — произвольный общий делитель многочленов  $f(x)$  и  $g(x)$ , то, как было доказано,  $d(x) : h(x)$ . Значит, и  $cd_1(x) : h(x)$ , т. е.  $d_1(x) : h(x)$ . Обратно, пусть теперь  $d_1(x)$  — общий делитель, делящийся на каждый общий делитель многочленов  $f(x)$  и  $g(x)$ , и  $d(x)$  — какой-то их НОД. Тогда  $d_1(x) : d(x)$ , а значит,  $\text{ст.} d_1(x) \geq \text{ст.} d(x)$ . Но  $d(x)$  — общий делитель наибольшей степени. Следовательно,  $\text{ст.} d_1(x) = \text{ст.} d(x)$ , т. е.  $d_1(x)$  — НОД.

100. а)  $d(x) = x^2 + x - 2 = -\frac{1}{3} f(x) + \frac{1}{3} (x + 1)g(x)$ ; б)  $d(x) = x - 1 = \frac{1}{11} (x^3 - x^2 + 3x + 6) f(x) + (-x^3 + 2x^2 - 5x - 1)g(x)$ ;

$$\text{в) } d(x) = x^2 + 2x + 1 = -\frac{1}{4}(9x - 11)f(x) - \frac{3}{4}(9x^2 + 7x + 5)g(x);$$

$$\text{г) } d(x) = 4 = f(x) - (x^3 - x - 1)g(x).$$

101. Нет. Решение. Например,  $x(x^2 + x + 1) + 1(x - 1) = x^3 + x^2 + 2x - 1$ , т. е.  $f(x) = x^2 + x + 1$ ,  $g(x) = x - 1$ ,  $u(x) = x$ ,  $v(x) = 1$ ,  $d(x) = x^3 + x^2 + 2x - 1$ , а  $d(x)$  не является даже делителем  $f(x)$  и  $g(x)$ .

102. Решение. Имеем  $f(x) = d(x)s_1(x)$ ,  $g(x) = d(x)s_2(x)$ , и  $u(x)f(x) + v(x)g(x) = d(x)$  для некоторых многочленов  $u(x)$  и  $v(x)$ . Подставим в последнее равенство выражения для многочленов  $f(x)$  и  $g(x)$ . Получим  $u(x)d(x)s_1(x) + v(x)d(x)s_2(x) = d(x)$ . После сокращения на  $d(x)$  имеем  $u(x)s_1(x) + v(x)s_2(x) = 1$ . Из этого равенства и следует, что многочлены  $s_1(x)$  и  $s_2(x)$  взаимно просты.

103. Решение. Имеем  $u(x)f(x) + v(x)h(x) = 1$  для некоторых многочленов  $u(x)$  и  $v(x)$ . Умножим обе части этого равенства на  $g(x)$ . Получим  $u(x)f(x)g(x) + v(x)h(x)g(x) = g(x)$ . Каждое слагаемое в левой части последнего равенства делится на  $h(x)$ , а значит, и сумма, т. е.  $g(x)$ , делится на  $h(x)$ .

104. Решение. Пусть  $d(x)$  — НОД многочленов  $f(x)$  и  $g(x)$ . Так как  $g(x) : d(x)$ , то  $\text{ст.}d(x) \leq \text{ст.}g(x) = 1$ . Значит, либо  $\text{ст.}d(x) = 0$ , либо  $\text{ст.}d(x) = 1$ . Если  $\text{ст.}d(x) = 0$ , то  $f(x)$  и  $g(x)$  взаимно просты. Пусть  $\text{ст.}d(x) = 1$ . Тогда  $g(x) = d(x)s(x)$  и ясно, что  $\text{ст.}s(x) = 0$ , т. е.  $s(x) = c$ . Имеем  $g(x) = cd(x)$ . Так как  $f(x) : d(x)$ , то  $f(x) : cd(x)$ , т. е.  $f(x) : g(x)$ .

105. в) Решение. Обозначим  $a = \sqrt[3]{1 - \sqrt{2}}$ . Тогда  $a^3 = 1 - \sqrt{2}$ ,  $a^3 - 1 = -\sqrt{2}$ ,  $(a^3 - 1)^2 = 2$ ,  $a^6 - 2a^3 - 1 = 0$ . Таким образом, число  $\sqrt[3]{1 - \sqrt{2}}$  является корнем многочлена  $f(x) = x^6 - 2x^3 - 1$ .

106. а) Решение. Пусть  $d(x)$  — НОД многочленов  $f(x)$  и  $p(x)$ , коэффициенты которого рациональные числа. Тогда  $u(x)f(x) + v(x)p(x) = d(x)$  для некоторых многочленов  $u(x)$  и  $v(x)$ . Отсюда  $d(c) = u(c)f(c) + v(c)p(c) = 0$ . Так как  $p(x) : d(x)$ , то  $\text{ст.}d(x) \leq \text{ст.}p(x)$ . Но  $d(c) = 0$ , а  $p(x)$  — многочлен наименьшей степени, для которого  $c$  — корень. Значит,  $\text{ст.}d(x) = \text{ст.}p(x)$ . Тогда из  $p(x) : d(x)$  следует  $p(x) = ad(x)$ . Так как  $f(x) : d(x)$ , то  $f(x) : p(x)$ ; б) Решение. Пусть  $d(x)$  — НОД данных многочленов, коэффициенты которого — рациональные числа. Тогда  $p(x) = d(x)s(x)$  и  $p(c) = d(c)s(c) = 0$ . Но  $d(c) \neq 0$ , значит,  $s(c) = 0$ . Если  $\text{ст.}d(x) > 0$ , то  $\text{ст.}s(x) < \text{ст.}p(x)$ , что невозможно. Следовательно,  $\text{ст.}d(x) = 0$ .

107. а)  $-\frac{5}{78}\sqrt[3]{25} + \frac{23}{78}\sqrt[3]{5} + \frac{19}{78}$ ; б)  $-\frac{1}{7}\sqrt[4]{27} + \frac{2}{7}\sqrt[4]{9} - \frac{1}{7}\sqrt[4]{3} + \frac{1}{7}$ ; в)  $-\sqrt[4]{8} + 2\sqrt[4]{4} + 3\sqrt[4]{2} + 1$  (Указание. Положите  $1 - \sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{2} = 1 - \sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{4}$ ); г)  $-\frac{1}{5}\sqrt[6]{16} + \frac{1}{5}\sqrt[6]{8} + \frac{1}{5}\sqrt[6]{4} + \frac{2}{5}\sqrt[6]{2} + \frac{1}{5}$  (Указание. Положите  $1 + \sqrt[6]{2} + \sqrt[6]{2} = 1 + \sqrt[6]{8} - \sqrt[6]{4}$ ;  $c = \sqrt[6]{2}$ ,  $f(x) = x^3 - x^2 + 1$ ); д)  $\frac{1}{4}\sqrt[4]{2} - \frac{1}{4}\sqrt[4]{6} + \frac{1}{2}$  (Указание. Положите  $c = \sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{3}$ . Тогда  $f(x) = x + 1$ . Далее из  $c = \sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{3}$  следует:  $c^2 = 5 + 2\sqrt[4]{6}$ ,  $c^2 - 5 = 2\sqrt[4]{6}$ ,  $(c^2 - 5)^2 = 24$ ,  $c^4 - 10c^2 + 1 = 0$ . Таким образом,  $c = \sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{3}$  является корнем многочлена  $x^4 - 10x^2 + 1$ , т. е. можно положить  $p(x) = x^4 - 10x^2 + 1$ .)

111.  $r(x) = -x$ . (Указание. См. решение упражнения 44.)

112.  $f(x) = (x + 4 - i)(x^2 + (-3 + i)x + 11 - 7i) - 44 + 39i$ .

113.  $f(x) = (x + 2)(x - i)^2(x - 3)^3(x - 3 + 2i)^3$ .

115.  $f(x) = 2 + 3i(x - i) + 2(x - i)^2$ .

116. Решение. Докажем, например, что  $-1 + i\sqrt{5}$  — алгебраическое число. Обозначим  $c = -1 + i\sqrt{5}$ . Тогда  $c + 1 = i\sqrt{5}$  и  $(c + 1)^2 = -5$ . Отсюда  $c^2 + 2c + 6 = 0$ , т. е.  $c$  — корень многочлена  $f(x) = x^2 + 2x + 6$ .

117. Решение. Пусть  $f(x) : g(x)$ . Тогда  $f(x) = g(x)s(x)$ . Если  $c$  — корень  $g(x)$ , то  $f(c) = g(c)s(c) = 0$ , т. е.  $c$  — корень  $f(x)$ . Пусть  $k$  и  $q$  — кратности этого корня для многочленов  $f(x)$  и  $g(x)$  соответственно. Так как  $f(x) : g(x)$  и  $g(x) : (x - c)^q$ , то  $f(x) : (x - c)^q$ , а значит,  $q \leq k$ . Обратно, пусть каждый корень многочлена  $g(x)$  является корнем  $f(x)$  и кратность этого корня для  $g(x)$  не выше, чем для  $f(x)$ . Пусть далее  $c_1, c_2, \dots, c_m$  — все различные корни  $g(x)$  кратностей  $q_1, q_2, \dots, q_m$  соответственно, а  $k_1, k_2, \dots, k_m$  — кратности этих корней для  $f(x)$ . Тогда  $g(x) = b(x - c_1)^{q_1}(x - c_2)^{q_2} \dots (x - c_m)^{q_m}$ , а  $f(x) = a(x - c_1)^{k_1}(x - c_m)^{k_m}s(x)$ , где  $q_1 \leq k_1$ ;  $q_2 \leq k_2$ ; ...;  $q_m \leq k_m$ . Ясно, что в этом случае  $f(x) : g(x)$ .

118. Решение. Пусть  $f(x) : f'(x)$  и  $f(x) = a_n(x - c_1)^{k_1}(x - c_2)^{k_2} \dots (x - c_m)^{k_m}$ . Тогда  $f'(x) = b(x - c_1)^{q_1}(x - c_2)^{q_2} \dots (x - c_m)^{q_m}$ . Однако известно, что если, например,  $k_1$  — кратность корня  $c_1$  для  $f(x)$ , то для  $f'(x)$  кратность этого корня равна  $k_1 - 1$ . Значит,

$f'(x) = b(x - c_1)^{k_1-1} (x - c_2)^{k_2-1} \dots (x - c_m)^{k_m-1}$ . Далее,  $\text{ст.} f(x) = k_1 + k_2 + \dots + k_m$ ,  $\text{ст.} f'(x) = k_1 + k_2 + \dots + k_m - m = \text{ст.} f(x) - m$ . Но  $\text{ст.} f'(x) = \text{ст.} f(x) - 1$ . Значит,  $\text{ст.} f(x) - 1 = \text{ст.} f(x) - m$ . Отсюда следует, что  $m = 1$ , т.е.  $f(x) = a_n(x - c_1)^{k_1}$ . Обратно, если  $f(x) = a_n(x - c_1)^{k_1}$ , то легко проверить, что  $f(x) : f'(x)$ .

**119. Решение.** Ясно, что нулевой многочлен удовлетворяет условию задачи. Будем считать далее, что искомым многочлен  $f(x)$  — ненулевой. Пусть  $f(x) = f'(x)f''(x)$  и  $\text{ст.} f(x) = n$ . Тогда  $\text{ст.} f'(x) = n - 1$  и  $\text{ст.} f''(x) = n - 2$ . Значит,  $n = n - 1 + n - 2$ . Отсюда  $n = 3$ . Итак,  $f(x)$  — многочлен третьей степени. Так как  $f(x) : f'(x)$ , то  $f(x) = a_n(x - c_1)^3$ . Тогда  $f'(x) = 3a_n(x - c_1)^2$ ,  $f''(x) = 6a_n(x - c_1)$  и  $a_n(x - c_1)^3 = 18a_n^2(x - c_1)^3$ . Отсюда  $a_n = 1/18$ , а значит,  $f(x) = \frac{1}{18}(x - c_1)^3$ . Легко проверить, что полученный многочлен — искомым.

**120.** а)  $f(x) = (x - i)(x + i)$ ; б)  $f(x) = (x - 1)(x + 1)(x - i) \times (x + i)$ ; в)  $f(x) = (x + 1) \left( x - \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left( x - \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ ; г)  $f(x) = (x - 2)(x + 2)(x - 2i)(x + 2i)(x + 1 + i\sqrt{3})(x + 1 - i\sqrt{3}) \times (x - 1 + i\sqrt{3})(x - 1 - i\sqrt{3})$ .

**121.** а)  $\frac{b^2 - 2ac}{a^2}$ ; б)  $-\frac{b}{c}$ ; в)  $\frac{b^2 - 2ac}{ac}$ ; г)  $\frac{b^2 - 2ac}{c^2}$ ; д)  $\frac{3abc - b^3}{a^3}$ .

**122. а) Решение.** Пусть  $c_1, c_2, c_3$  — корни данного многочлена и  $c_3 = 2c_2$ . По формулам Виета имеем

$$\left. \begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 &= 0, \\ c_1c_2 + c_1c_3 + c_2c_3 &= -21, \\ -c_1c_2c_3 &= r. \end{aligned} \right\}$$

Преобразуем эту систему, используя тот факт, что  $c_3 = 2c_2$ . Получим

$$\left. \begin{aligned} c_1 + 3c_2 &= 0, \\ 3c_1c_2 + 2c_2^2 &= -21, \\ -2c_1c_2^2 &= r. \end{aligned} \right\}$$

Выразим из первого уравнения  $c_1$  и подставим в остальные. Тогда

$$\left. \begin{aligned} 7c_2^2 &= 21, \\ 6c_2^3 &= r. \end{aligned} \right\}$$

Отсюда  $r = \pm 18\sqrt{3}$ ; б)  $r = -128$ ; в)  $r = 25$ .

123. а) Решение. Пусть  $c_1, c_2, c_3$  — корни многочлена  $f(x)$ , образующие арифметическую прогрессию. Тогда по формулам Виета имеем:

$$\left. \begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 &= -6, \\ c_1c_2 + c_1c_3 + c_2c_3 &= 5, \\ -c_1c_2c_3 &= r, \end{aligned} \right\} \text{ или } \left. \begin{aligned} (c_1 + c_3) + c_2 &= -6, \\ c_1c_3 + c_2(c_1 + c_3) &= 5, \\ -c_1c_2c_3 &= r. \end{aligned} \right\}$$

Так как  $c_1, c_2, c_3$  — арифметическая прогрессия, то  $(c_1 + c_3)/2 = c_2$ , т. е.  $c_1 + c_3 = 2c_2$ . Тогда исходная система имеет вид

$$\left. \begin{aligned} 3c_2 &= -6, \\ c_1c_3 + 2c_2^2 &= 5, \\ -c_1c_2c_3 &= r. \end{aligned} \right\}$$

Из первого уравнения следует, что  $c_2 = -2$ , из второго —  $c_1c_3 = -3$ , а из третьего —  $r = -6$ . Таким образом,  $f(x) = x^3 + 6x^2 + 5x - 6$  и один из корней этого многочлена  $c_2 = -2$ . Разделив  $f(x)$  на  $x + 2$ , легко найдем два других корня. Это числа  $-2 \pm \sqrt{7}$ ; б)  $f(x) = x^3 - 18x^2 + 68x + 24$ ,  $c_1 = 6$ ,  $c_{2,3} = 6 \pm \sqrt{10}$ .

124.  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$ ,  $c_1 = -2$ ,  $c_2 = 1$ ,  $c_3 = 4$ . (Указание. Если  $c_1, c_2, c_3$  — геометрическая прогрессия, то  $c_2^2 = c_1c_3$ .)

125.  $a = 0,5$ .

126. а) Решение. Пусть  $c_1, c_2, c_3$  — корни данного многочлена. Тогда

$$\left. \begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 &= 3, \\ c_1c_2 + c_1c_3 + c_2c_3 &= 4, \\ c_1c_2c_3 &= -9. \end{aligned} \right\}$$

Возведя первое равенство в квадрат, с учетом второго равенства имеем  $c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1$ . Если предположить, что  $c_1, c_2, c_3$  — действительные числа, то из полученного равенства следует, что  $|c_1| \leq 1$ ,  $|c_2| \leq 1$ ,  $|c_3| \leq 1$ . Тогда  $|c_1c_2c_3| \leq 1$ , а по условию  $c_1c_2c_3 = -9$ . Пришли к противоречию.

127. а) Решение. Пусть  $c_1, c_2$  — корни данного многочлена  $f(x)$ . Тогда  $c_1 + c_2 = -p$  и  $c_1c_2 = q$ . Искомый многочлен имеет вид

$g(x) = x^2 + ax + b$ . Его корнями должны быть числа  $-c_1$  и  $-c_2$ , а значит,  $(-c_1) + (-c_2) = -a$ ,  $(-c_1)(-c_2) = b$ . Из полученных четырех равенств следует, что  $a = -p$ ,  $b = q$ , т. е.  $g(x) = x^2 - px + q$ ; б)  $g(x) = x^2 + \frac{p}{q}x + \frac{1}{q}$ ; в)  $g(x) = x^2 - 2px + 4q$ .

**128. а) Решение.** Искомый многочлен  $g(x)$  имеет вид  $g(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ . Тогда  $k_1 + k_2 + k_3 = -a$ ,  $k_1k_2 + k_1k_3 + k_2k_3 = b$ ,  $k_1k_2k_3 = -c$ . Подставим в эти равенства значения  $k_1, k_2, k_3$ . Получим:  $c_1c_2 + c_1c_3 + c_2c_3 = -a$ ,  $c_1^2c_2c_3 + c_1c_2^2c_3 + c_1c_2c_3^2 = b$ ,  $c_1^2c_2^2c_3^2 = -c$ . Но

так как  $c_1, c_2, c_3$  — корни многочлена  $f(x)$ , то  $c_1 + c_2 + c_3 = 0$ ,  $c_1c_2 + c_1c_3 + c_2c_3 = -2$ ,  $c_1c_2c_3 = 5$ . Тогда  $a = 2$ ,  $c = -25$ ,  $b = c_1c_2c_3(c_1 + c_2 + c_3) = 5 \cdot 0 = 0$ . Таким образом,  $g(x) = x^3 + 2x^2 - 25$ .

**129. Решение.** Разделим  $f(x)$  на  $g(x)$  с остатком. Получим  $f(x) = g(x)s(x) + r(x)$ ; тогда либо  $r(x) = 0$ , либо ст.  $r(x) < 2$ . Значит, остаток  $r(x)$  имеет вид  $r(x) = kx + m$ . Так как  $f(x)$  и  $g(x)$  — многочлены с целыми коэффициентами и старший коэффициент  $g(x)$  равен 1, то  $k$  и  $m$  — целые числа. Имеем  $f(c_1) = g(c_1)s(c_1) + kc_1 + m = kc_1 + m$ . Аналогично получаем, что  $f(c_2) = kc_2 + m$ . Тогда  $f(c_1) + f(c_2) = k(c_1 + c_2) + 2m$ . Но  $c_1 + c_2 = -a$ , а значит,  $f(c_1) + f(c_2) = -ka + 2m$  — целое число.

**130. Решение.** Числа  $a + \sqrt{b}$  и  $a - \sqrt{b}$  являются корнями многочлена  $g(x) = (x - (a + \sqrt{b}))(x - (a - \sqrt{b})) = x^2 - 2ax + (a^2 - b)$ . Так как  $g(x)$  — многочлен с целыми коэффициентами и его старший коэффициент равен 1, то дальнейшее доказательство сводится к решению упражнения 129.

**131. Решение.** Заданное равенство можно преобразовать к виду  $abc = (a + b + c)(ab + ac + bc)$ . Пусть  $a, b, c$  являются корнями многочлена  $f(x) = x^3 + px^2 + qx + r$  (такой многочлен всегда есть, например  $(x - a)(x - b)(x - c)$ ). Тогда  $a + b + c = -p$ ,  $ab + ac + bc = q$ ,  $abc = -r$  и  $r = pq$ . В этом случае  $f(x) = x^3 + px^2 + qx + pq = (x + p)(x^2 + q)$ . Видим, что  $-p$  — корень многочлена  $f(x)$ , а значит,  $-p$  совпадает с одним из чисел  $a, b, c$ . Пусть  $-p = a$ . Тогда из  $a + b + c = -p$  следует, что  $b + c = 0$ , т. е.  $b = -c$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Алгебра / Н. Я. Виленкин, Р. С. Гутер, С. Ш. Шварцбург и др.— М.: Просвещение, 1972.—302 с.
2. Дьяконов В. П. Справочник по расчетам на микрокалькуляторах.— М.: Наука, 1985.—224 с.
3. Избранные вопросы математики. 10 класс: (Факультат. курс)/ А. М. Абрамов, Н. Я. Виленкин, Г. В. Дорофеев и др.; Под ред. В. В. Фирсова.— М.: Просвещение, 1980.—190 с.
4. Математика 9—10: (Факультат. курс) / М. А. Доброхотова, О. А. Котий, В. Г. Потапов и др.; Под ред. З. А. Скопеца.— М.: Просвещение, 1971.—208 с.
5. Соминский И. С. Элементарная алгебра.— М.: Наука, 1967.— 200 с.
6. Хасин Г. В. Многочлены и их корни // Дополнительные главы по курсу математики 10 / Сост. З. А. Скопец.— М.: Просвещение, 1974.— С. 111—159.

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>К читателю . . . . .</b>	<b>3</b>
<b>Многочлены от одной переменной . . . . .</b>	<b>5</b>
Понятие многочлена. Степень многочлена . . . . .	5
Равенство многочленов. Значение многочлена . . . . .	9
Операции над многочленами . . . . .	13
Делимость многочленов . . . . .	16
Метод неопределенных коэффициентов . . . . .	19
Деление многочленов с остатком . . . . .	24
Теорема Безу . . . . .	32
Схема Горнера . . . . .	35
Корни многочленов . . . . .	39
Интерполяционная формула Лагранжа . . . . .	43
Кратные корни многочлена . . . . .	46
Производная многочлена . . . . .	51
Формула Тейлора . . . . .	57
Рациональные корни многочлена . . . . .	64
Наибольший общий делитель . . . . .	71
Алгоритм Евклида . . . . .	73
Линейное представление наибольшего общего делителя . . . . .	79
Взаимно простые многочлены . . . . .	83
Алгебраические числа . . . . .	88
Освобождение от иррациональности в знаменателе дроби . . . . .	90
<b>Многочлены и комплексные числа . . . . .</b>	<b>95</b>
Многочлены с комплексными коэффициентами . . . . .	95
Основная теорема алгебры . . . . .	96
Формулы Виета . . . . .	100
	<b>175</b>



Решение уравнений и систем уравнений . . . . .	103
Корни многочленов с действительными коэффициентами . .	106
Разложение на множители многочленов с действительными коэффициентами . . . . .	109
<b>Использование программируемого микрокалькулятора «Элек- троника МК-54» . . . . .</b>	<b>111</b>
Вычисление значений многочлена по схеме Горнера . . . .	111
Поиск рациональных корней многочлена . . . . .	117
Освобождение от иррациональности в знаменателе дроби. Проверка результата . . . . .	119
Деление многочлена на линейный двучлен . . . . .	121
Определение кратности корня . . . . .	129
Разложение многочлена по степеням $x - c$ . . . . .	135
Решение уравнений . . . . .	140
Умножение многочленов . . . . .	148
О программируемых микрокалькуляторах . . . . .	152
Ответы, указания, решения . . . . .	155
Л и т е р а т у р а . . . . .	174

## Научно-популярное издание

Деменчук Василий Владимирович

## МНОГОЧЛЕНЫ И МИКРОКАЛЬКУЛЯТОР

Заведующий редакцией Л. Д. Духвалов. Редактор М. С. Молчанова.  
Младший редактор В. М. Кушилевич. Художник обложки В. А. Яро-  
шевич. Художественный редактор Ю. С. Сергачев. Технический редак-  
тор Г. М. Романчук. Корректор В. П. Шкредова.

ИБ № 2700

Сдано в набор 24.11.87. Подписано в печать 25.05.88. АТ 12608. Формат  
70×108/32. Бумага тип. № 1. Гарнитура литературная. Высокая печать. Усл.  
печ. л. 7,7. Усл. кр. отт. 8,05. Уч.-изд. л. 7,86. Тираж 30 000 экз. Заказ 620.  
Цена 35 к.

Издательство «Вышэйшая школа» Государственного комитета БССР по де-  
лам издательств, полиграфии и книжной торговли. 220048, Минск, проспект  
**Машерова, 11.**

Ордена Трудового Красного Знамени типография издательства ЦК КП Бело-  
руссии. 220041, Минск, Ленинский пр., 79.



35 к.



Издательство «Высшая школа»

$a_0 x^n +$

$x^n + a_1 x^{n-1}$